

令和 2 年 5 月 31 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：16K00005

研究課題名（和文）ランダム行列と測度収束を応用した量子通信の研究

研究課題名（英文）Application of random matrices and measure concentration to quantum communication theory

研究代表者

福田 素久（Fukuda, Motohisa）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：70771161

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：量子通信路の非加法性によって、シャノンの通信理論が量子通信に自然に拡張できない。この非加法性は、M.Hastingsがランダムに生成された量子通信路を用いて示した(2009年出版)。本研究では、ランダム行列、自由確率、測度収束の理論を用いて、同様の量子通信路に関して典型的な性質への理解を深め、非加法性を示す新たな量子通信路のクラスも見つけた。また、ランダムなユニタリ行列の抽象的計算プログラムを開発し、それを用いて量子ガウス状態の最大エントロピー原理に関する統計物理的結果も得た。さらに、メアンダー問題との組み合わせ論的な繋がりを明らかにし、メアンダー多項式の母関数の定式化への部分的結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子通信路の通信路容量を計算するにはエンタングルメントの影響を評価する必要があるが、その影響は限定的であるという主張を支持する数学的な結果を得た。また、ランダムなユニタリ行列を含むテンソルネットワークの平均を計算するコンピュータープログラムを作成し、無償で公開した。そのプログラムを用いて量子光学を記述するボソン系ガウス状態の最大エントロピーの原理に沿った結果を証明し、量子統計学への貢献も行った。さらに、ポリマーの折り曲げ問題に関連するメアンダー多項式の母関数の定式化への部分的結果を得た。

研究成果の概要（英文）：Non-additivity of quantum channels prohibits us from extending Shannon's channel coding theorem to quantum communication. This non-additive property was proved by M. Hastings in 2009 by using randomly generated quantum channels. In this project, we used random matrices, free probability, and measure concentration to analyse such quantum channels. Our results include finding a new class of non-additive quantum channels. Also, we developed a computer program to calculate abstractly average of tensor networks with random unitary matrices, and then applied it to yield some results on random quantum Gaussian states, aligned with maximal entropy principle, which plays a key role in statistical mechanics. Besides, we showed mathematical connection between our problems of quantum channels to those of meandric systems, and gave partial results on formulas of generating functions of meandric polynomials.

研究分野：量子情報理論

キーワード：量子情報 ランダム行列 自由確率 測度集中 量子通信 量子ガウス状態

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

従来の通信路容量の理論は Bell 研究所の C. Shannon によって 1948 年に定式化された。しかし、通信路が量子論的な法則に従う(たとえば光ファイバーで弱い光を送信する)場合、この Shannon の理論は一般に成立しない。これは量子論におけるエンタングルメントと呼ばれる複数の量子状態間の相互作用に起因する。この問題は、2004 年に MIT の P. Shor が Holevo 容量の非加法性と最小出力エントロピーの非加法性の同値性を示したことで理解が進み、2009 年に、当時 Microsoft Research Station Q に所属していた M. Hastings が量子通信路の最小エントロピーの非加法性を示したことで、この量子通信路の非古典性が示された。この進展は、通信路容量の問題をランダム行列の固有値の問題として考え直すことでもたらされた。(最小出力エントロピーとは、各々の通信路に対して、可能な出力量子状態の最小エントロピーを割り当てるものである。この量はある意味、通信路のノイズを測るもので、上記の考えは直感的に納得がいくものである。)

その後、証明の厳密化や一般化が研究代表者を含めた人々によって進められ、2つの流れが生じた。ランダム行列と測度収束を使う方法と、ランダム行列とその漸近極限を自由確率で扱う方法である。そもそも、最小出力エントロピーの問題が難しいのは、上に凸な関数の最小値を計算する問題だからであり、任意に与えられた量子通信路の最小出力エントロピーを求めることは自明ではない。従って、ランダムに生成した量子通信路の特徴的性質を調べることに意義があるといえる。もっとも、このようなランダム行列を使った研究でも、エンタングルメントと量子通信路の最小エントロピーの関係はあまり解明されていない。また、上記の非加法性が示される量子通信路は理論的なモデルであり、現実により近いボソン系のガウス通信路(光ファイバー)での非加法性についても一般的に分かっていない。

2. 研究の目的

通信路容量は無限に長い符号を想定した漸近的な量である。ここで、符号を順次送る作業はノイズの独立性を仮定することで、量子通信路(数学的には正規完全正写像)では、それらのテンソル積で記述される。ゆえに、ランダムに生成された量子通信路のテンソル積に対して、どのような入力が必要出力エントロピーを与えるかについて研究する。また、最小出力エントロピーへの上界を用いることで通信路容量への上界を研究する。さらに、ボソン系のガウス通信路のテンソル積に非加法性が現れるかを検証する。

3. 研究の方法

ランダム行列、自由確率、測度収束などの数学の手法を用いて、ランダムに生成された量子通信の最小出力エントロピーの非加法性の問題を研究した。研究協力者として、トゥールーズ大学の Ion Nechita、ミュンヘン工科大学の Robert Koenig、京都大学のコリンズブノワ、北海道大学の長谷部高広が挙げられる。

4. 研究成果

(1) 先行研究では、ハール測度をもつユニタリ行列によってランダムに生成された量子通信路を用いて、最小出力エントロピーの非加法性を示す量子通信路の存在が示された。ここではまず、量子通信路のノイズを生成する環境の空間の次元を十分大きく取っておく。入力と出力空間が等しい場合、その次元をさらに十分大きく取れば、非加法性が典型的な性質となって現れる。しかしながら、この非加法性は、ユニタリ行列により生成された量子通信路と、そのユニタリ行列の複素共役から生成される量子通信路との間で生じる。これは入力空間が2つの空間のテンソル積から成る場合、ベル状態の入力に対応した出力のエントロピーが小さくなることから示される。これはユニタリ群の表現のテンソル積を構成したときの、1次元既約表現に対応する。

本研究では、上記のユニタリ行列をその部分群である直交群に置き換え理論を展開した。直交行列は複素共役をとっても変わらないため、非加法性のペアを同じ量子通信路で構成することができる。通信路容量の計算では無限回の送信が想定されるが、ノイズの独立性を仮定すればこの操作は無限個の量子通信路(正規完全正写像)のテンソル積で表現できる。つまり、通信路容量の視点からは、非加法性も同じ量子通信路のテンソル積について議論する必要があることが研究の動機である。本研究では上述のようにランダムに量子通信路を生成し、 $2n$ 個のコピーのテンソル積に対する最適入力量子状態を考察した。ランダム行列のモーメント計算の結果、典型的な最適入力は n 個のベル状態のテンソル積であることが分かった。もっとも、最小出力エントロピーとその最適入力状態は、各量子通信路に対して個別に計算されるべきであるが、そのような議論は $n=1$ のときでさえ困難を極める。しかしながら、本研究の結果が示唆する(証明はしていない)ところは、実際の最適入力状態のエンタングルメントの範囲は2つの空間のテンソル積を超えないということである。これを通信の話に置き換えれば、量子状態を順次送信する場合は、前後する2つの量子状態をベル状態にすれば、出力側で最小エントロピーが達成されることになる。この結果は[4]としてまとめられた。

そもそも古典的な通信理論では、無限回の送信が可能として、その極限で定まる通信路容量が、最大相互エントロピーとして定式化されている。量子通信においてこのような定式化を阻んでいるのは非局所的なエンタングルメントであり、その範囲を抑えることができれば、量子通信路の通信路容量の簡潔な表現へつながる可能性がある。

(2) 行列の計算を Mathematica や MATLAB などで行う場合は行列の要素を具体的に指定する必要がある。この枠組みに基づいてランダムなユニタリ行列の平均を計算するプログラムの先行研究は存在した。しかし、行列の理論的な研究をする場合は行列を行列として扱う方が良い。本研究では Mathematica と Python にて抽象的な行列の計算を行うプログラムを作成した。例えば、このプログラムは、行列のトレースを、対角成分の和としてではなく、トレースとして処理する。

そもそもハール測度をもつユニタリ群上の平均を計算する式は Weingarten Calculus といわれ、組合せ論を用いて表現される。この計算をテンソルネットワークの枠組みでとらえ、平均をグラフのノードの繋がりや重みで書き直したものをプログラムに直したものが本研究の成果物である。

たとえば、テンソルネットワーク内にユニタリ行列とその共役の組が 4 つあるとすると、その平均を計算するには $4! \times 4! = 576$ 通りの場合を考える必要がある。この計算を自動化して以下に説明する量子ガウス状態に関する結果[1]を得た。

以上の結果は[2]として出版されたが、その後、ランダムなユニタリ行列から成る多項式のみ平均を計算する、入力がしやすいプログラムを Python で作成し無償公開した。さらに、その簡易版はユーザーがウェブブラウザのみでできるようにウェブサーバー上に無償で公開した。

(3) ランダムなガウス量子状態について

2 つの系から成る系の量子状態のエンタングルメントの強さは各系でのエントロピーで定義できる。このような基準でランダムな量子状態のエンタングルメントの典型的な強さを評価する研究は長い歴史があり、最終的に上で議論した量子通信路の非加法性の研究に繋がっている。

本研究では、同様の研究をランダムに生成したボソン系ガウス状態に対して行った。ボソン系ガウス状態は量子光学などに現れる重要なモデルである。ガウス状態を記述する共分散行列(平均は重要ではない)をランダムなシンプレクティック行列を用いて生成し、その典型的な振る舞いを調べた。ただし、シンプレクティック行列は直交行列であるものに限り、コンパクトな空間で理論を展開した。ランダム行列のモーメントの計算で上記のプログラム[2]を使用し、576 通りの計算を電子計算機で行った。この計算により共分散行列の典型的な振る舞いが分かり、その典型性を測度集中の手法を使って証明した。

結果として、大きな系のランダムな量子ガウス状態の部分状態は典型的に共分散行列のシンプレクティック固有値が「平ら」であり、エネルギーも全体の系の平均に近いことが分かった。本研究の手法ではシンプレクティック固有値を直接評価しているので、同様の議論を他のエンタングルメントを測る関数に拡張することは容易である。以上の結果は量子統計力学の最大エントロピー原理の例としてみることができ、[1]にて発表された。部分状態をとるという操作は理論的には量子通信路に分類される。今後、量子ガウス通信路についての非加法性の研究へ発展することが望まれる。

(4) 量子通信路の非加法性は、ランダム行列によって生成された量子通信路に対して確率論的に示されてきた。この場合使用されるランダム行列としては、量子物理の枠組みから、ユニタリ行列(もしくはその部分群である直交行列)が用いられてきた。

本研究では GUE を用いて非加法性を示す新しい量子通信路の構成を行った。これは random unitary channels (もしくは random external fields) のユニタリ行列を GUE に変えたものである。もっとも、このままでは完全正写像にしかならず、量子通信路ではない。そこで、まず入力を量子状態としたときの、出力である半正定値行列(量子状態ではない)の最大 p ノルムを考えた。そして、GUE のサイズが大きくなる漸近領域でそのノルムが収束する値を自由確率の手法を通してラグランジュ問題として定式化した。つぎに、自由確率の中心極限定理の帰結を使い、この写像を正規化して量子通信路を得、Haagerup 不等式の semi-circular elements への拡張結果を使用し非加法性を示した。この不等式の拡張結果は先行結果があるが、本研究で証明を見直し、不等式に使用される定数の再評価などを行った。現在執筆中である。

(5) 本プロジェクトを通して使われたランダム行列のモーメント計算は、組合せ論的な表現で書かれており、数学的にはメアンダー問題と繋がっている。直線の川に $2n$ 個の橋が架かっている場合、すべての橋を通り、かつ交わらない閉じた経路の種類は何個あるか、と問う問題がメアンダー問題であり、長年の未解決問題を含んでいる。閉じた経路が複数ある場合も考えて問題を一般的に定式化できる。ちなみに経路の数が n のときは Catalan 数になる。

経路の数が n に近いときに限って、母関数を既約メアンダーによって表現し、特殊な変換を行うことで有理関数を得てその次数の上界を得た[3]。これらの研究は自由確率の手法を用いて行われた。

この研究を進展させ分かったことは、2 つの量子通信路のテンソル積の良い評価をしようとする、このメアンダー問題の組み合わせ論的な問題にぶつかるということである。また、この自由確率的な計算を通して特殊な場合の母関数についての結果を得た。これらの結果は現在執筆中である。

(6) 本プロジェクト開始以前の研究結果を基にした論文を改定し、出版された[5]。これは、特殊なクラスの量子通信路の任意のテンソル積に関しての最小出力エントロピーに対する不等式評価で、結果として通信路容量の上限をあたえる。有名な例である Werner-Holevo 通信路に対しては正しい通信路容量を導き出すことができる。

<引用文献>

- [1] M. Fukuda, R. Koenig, “Typical entanglement for Gaussian states”, J. Math. Phys., 60, 112203 (2019)
- [2] M. Fukuda, R. Koenig, I. Nechita, “RTNI - A symbolic integrator for Haar-random tensor networks”, J. Phys. A: Math. Theor. 52 425303 (2019)
- [3] M. Fukuda, I. Nechita, “Enumerating meandric systems with large number of loops”, Annales de l’Institut Henri Poincaré D, 6, 4, 607-640 (2019)
- [4] M. Fukuda, I. Nechita, “On the minimum output entropy of random orthogonal quantum channels”, IEEE Trans. Info. Theo., Vol. 64, Iss. 2, 1374 - 1384 (2018)
- [5] M. Fukuda, G. Gour, “Additive Bounds of Minimum Output Entropies for Unital Channels and an Exact Qubit Formula”, IEEE Trans. Info. Theo., Vol. 61, Iss. 4, 1851-1859 (2015)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Fukuda Motohisa, Nechita Ion	4. 巻 6
2. 論文標題 Enumerating meandric systems with large number of loops	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri Poincare D	6. 最初と最後の頁 607 ~ 640
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/AIHPD/80	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Fukuda Motohisa, Koenig Robert, Nechita Ion	4. 巻 52
2. 論文標題 RTNI - A symbolic integrator for Haar-random tensor networks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 425303 ~ 425303
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab434b	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Fukuda Motohisa, Koenig Robert	4. 巻 60
2. 論文標題 Typical entanglement for Gaussian states	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 112203 ~ 112203
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5119950	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Fukuda Motohisa, Nechita Ion	4. 巻 64
2. 論文標題 On the Minimum Output Entropy of Random Orthogonal Quantum Channels	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 IEEE Transactions on Information Theory	6. 最初と最後の頁 1374 ~ 1384
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/TIT.2017.2774833	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Motohisa Fukuda, Gilad Gour	4. 巻 63
2. 論文標題 Additive bounds of minimum output entropies for unital channels and an exact qubit formula	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 IEEE Transactions on Information Theory	6. 最初と最後の頁 1818-1828
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/TIT.2016.2641455	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 M. Fukuda
2. 発表標題 Some classes of random quantum channels violating additivity
3. 学会等名 Workshop on "Non-commutative Probability and Related Fields" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M. Fukuda
2. 発表標題 Weingarten calculus on computers and its application to random quantum Gaussian states
3. 学会等名 Interactions between commutative and non-commutative probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M. Fukuda
2. 発表標題 Weingarten calculus on computers and its application to random quantum Gaussian states
3. 学会等名 Mathematical Aspects in Current Quantum Information Theory 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 福田素久
2. 発表標題 量子通信路研究における確率論的手法
3. 学会等名 日本数学会東北支部会 特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 M. Fukuda
2. 発表標題 Additivity questions and tensor powers of random quantum channels
3. 学会等名 Probabilistic techniques and quantum information theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 M. Fukuda
2. 発表標題 Additivity questions and tensor powers of random quantum channels
3. 学会等名 Probabilistic and algebraic methods in quantum information theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

RTNI https://motohisafukuda.github.io/RTNI/ RTNI_light https://motohisafukuda.github.io/RTNI_light/
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ネキータ イオン (Nechita Ion)	フランス国立科学研究センター トゥールーズ大学・理論物理研究所・フランス国立科学研究センター 研究員	
研究協力者	ケーニッヒ ロバート (Koenig Robert)	ミュンヘン工科大学・数学科・助教	
研究協力者	コリンズ ブノワ (Collins Benoit) (20721418)	京都大学・京都大学理学部・准教授 (14301)	
研究協力者	長谷部 高広 (Hasebe Takahiro) (00633166)	北海道大学・北海道大学理学部・准教授 (10101)	