

令和元年6月6日現在

機関番号：13103

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K00954

研究課題名(和文)変数概念を軸とした算数・数学連携カリキュラムの開発：認知的ツールとして文字式

研究課題名(英文)Development of a Curriculum Bridging Elementary and Secondary Mathematics on the Basis of the Variable Concept

研究代表者

布川 和彦 (Nunokawa, Kazuhiko)

上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授

研究者番号：60242468

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、小学校高学年の数量関係の領域から中学校の文字の利用を含む領域への展開を視野に入れたカリキュラムを構成することを目指し、その構成を方向づける原理を提案したものである。変数概念の観点から上述の領域に関わる先行研究、現行のカリキュラム、実際の授業や学習のようすを検討した結果、変数の考えを導入し、数量関係の学習を変数の記述として捉え直すとともに、中学校では変数の記述としての変数から自立した対象としての変数への移行を明示的に行い、それに応じたディスコースの維持するという原理に基づくカリキュラムが必要であることが示された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

小学校高学年から中学校にかけての算数・数学の指導に関して、学習者の理解の困難については具体的場面を利用することで学習者が取り組みやすくするという方向の提案が多いが、本研究はそうした提案とは方向性を異にし、具体的場面を用いた学習から数学的概念自体を対象とした学習への移行という観点からカリキュラムを吟味したり、そうした移行を意図的に生じさせるようなカリキュラムを構成したりするための原理を提案するという点で意義を有する。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study was to construct a principle which makes it possible to develop a curriculum bridging learning multiplicative structures at elementary school level and learning algebra at secondary school level. The analysis of previous researches, the current curriculum in Japan, and teaching and learning processes in mathematics lessons from the viewpoint of the variable concept, showed that such curriculum should include (a) to reconceptualize learning multiplicative structures in terms of description of variable quantities of objects-of-thought; (b) to shift from description of variable quantities or the use of variable at meta-level to the use of variable at object-level; (c) to make this shift explicit to students and to maintain the classroom discourse where variables are at object-level.

研究分野：数学教育学

キーワード：変数 小学校算数 中学校数学 数量関係 文字式 方程式 関数 変量

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

小学校算数の数量関係および中学校の関数領域の学習は、現実場面と算数・数学をつなぐ上で大切であるばかりでなく、多様な学問にもつながる重要な学習内容と考えられている。それだけに指導についても多くの研究がなされてきているにも関わらず、全国学力・学習状況調査などの結果でも学習者に十分理解されているとは言いがたい状況が続いている。また同調査でも取り上げられてきている、中学校2年生で学習する連立2元1次方程式と1次関数のグラフとの関係についての生徒の理解に反映されるように、同じ文字や文字式を利用してしながら方程式と関数との間の接続について、教科書等でも明確には意識されていないという問題もある。こうした状況を考えた場合、文字の中心的な機能の1つである変数に焦点を当てて、変数概念の視点からカリキュラムを意図的に展開していくための基本的な枠組みを構築し、小学校算数の数量関係から中学校の方程式や関数領域への学習の展開を見通せるようにすることが必要な状況であった。

2. 研究の目的

本研究は、前項で述べたような背景に鑑み、変数概念の視点からカリキュラムを意図的に展開していくための原理を示せるような枠組みを構築することを目的とする。その際、従前の小学校の割合などの乗法構造に関わる諸単元、中学校の方程式、中学校の関数を個別の学習内容とする立場の修正を目指し、変数および擬変数のアイデアを中心に据えた場合に、これら算数・数学の数量関係に関わる諸単元がどのように関連づけられるかを併せて明確にする。これにより、算数から中学校数学への移行に伴い、場面を処理する認知的ツールとしての文字式および関数概念の発達を現行よりも統合的かつスムーズに促進するカリキュラム構成を可能とする原理を提案する。

3. 研究の方法

本研究の方法は、大きくは3つの柱からなっている。第一に申請者によるこれまでの科学研究費補助金による研究および内外の関連する諸研究を、変数という観点から再構成し、カリキュラム構成の基本的な枠組みを理論的に構築する。また数学のカリキュラム全体において関数的視点を採り入れていたとされるいわゆる数学教育現代化期の教科書などを中心に、過去の教科書を吟味することを通して、現行の展開を相対化することにより、他の展開の可能性を探ることも試みる。第二に現状における児童・生徒の数量関係領域の学習の様子を変数の利用に特に焦点を当てて分析し、学習者の認知特性面からカリキュラム構成の前提条件を明らかにする。そのために実際の授業における学習の様子をビデオカメラにより記録・収集する。第三に以上の成果をもとに、擬変数および変数の発達に基づくカリキュラムの枠組みの構築を行うとともに、そこから構成される学習活動系列について実証的な検討を行うこと。そのために構築された枠組みを授業レベルの学習活動の系列として具体化した上で、それを実際の授業において実施し、そこでの学習のようすを記録・収集する。

4. 研究成果

第1年次はまず、申請者自身によるものも含めた先行研究の知見を、変数概念の観点から捉え直す作業が行われた。中等教育における文字式や方程式の指導の Functional Approach の諸研究については、方程式に現れる文字を未知数として解釈することから変数として解釈することだけでなく、方程式の応用に当たるような学習において場面の探究として変数のアイデアを利用する側面が重視されていたことが見出された。つまり、求めたい数量を文字において方程式を立てるに留まらず、文字に当たる数量を擬変数的に扱い、それに伴う他の数量の変化を見ることで問題場面の理解を深めることが重視されていた。つまり、文章題の具体的場面を記述し、その中の数量を変数的に扱い数量関係を探究することで、結果として文字式、方程式、関数といった内容が統合された扱い方が提唱されるようになっていた。また初等教育における Early Algebra の研究については、小学校段階から文字式や方程式の指導が試みられるものの、そこでも Functional Approach の基本的な考え方が継承され、問題としている具体的場面に関わる量やその量に対する行為に注意を向け、それらとシンボルを関連づけることが重視されていることが確認された。申請者は関数領域における算数から中学校数学への移行を、数学がパターンの科学であるとする観点から考察し、場面に見られるパターンの記述からパターン自体の対象化として特徴づけていたが、先行研究に対する上述のような知見は逆に、文字式などの文字の利用自体に対してパターンの科学という観点が適用可能であることを示唆する。数学教育現代化期を中心とする過去の教科書の分析からは、現行よりも文字の変数的な扱いが多く場面で見られ、その結果、中学校数学の段階であっても方程式と関数との融合が進んでいたことが見いだされた。例えば、方程式における文字についても未知数として扱うのではなく、変数として扱い、それをもとに方程式を規定する場面が見られた。また2次方程式をグラフを用いて考えることが、当時は中学校においても既に行われていることに加え、1元1次方程式をグラフで考えることも行われており、2元1次方程式をグラフで考えることと併せて、方程式と関数を統合的に扱うことが明確であったことが見いだされた。さらに、変数自体の定義についても現行の教科書に見られるものとは異なる定義が多く見られ、それとの対比を通して、現行の変数の定義では文字を主語とし、それが値を「とる」という、ある意味で数学的、

抽象的な定義が全ての教科書で採用されている点が明らかとなった。なお、上述の Functional Approach に関わって、方程式と関数の融合を先進的に採り入れている鳥取大学附属中学校の視察を行い、授業の参観と教師との情報交換を行ったが、それにより方程式と関数とを変数を軸として融合することは、ICT の利用を採り入れることで中学生でも十分可能であること、またそれによる混乱などは生じていないことが確認された。

第 1 年次には現状における数量関係領域の学習の様子を検討するために、算数の指導に専門性のある教師による数量関係を扱う小学校 5 年の授業 60 時間をビデオカメラにより記録し、分析を行った。5 年は数量関係に関わる単元を多く含む学年であるが、そのいずれの単元においても、この教師は除法により定義される数量関係を表す値(単位量あたりの大きさ、割合、比例定数等)について、その値がどのような対象のどのような特性を記述しているのかに児童の注意を向けるような指導をしていた。例えば、人口密度であればそれが示す地区の航空写真を見せたり、比重であればそれに応じて沈んだり浮かんだりする様子を見せていた。さらに多様な対象について数量関係を表す値を 1 本の数直線にとって比較することで、対象の持つ特性の記述という点をより明確に意識させていた。これらは算数の数量関係の授業において、数量関係の値が対象を記述するものであること、および数量関係で現れる値を擬変数的に扱うのが可能であることを示すものであり、算数の数量関係の学習を変量の観点からとらえなおすことで、変数の学習の展開に統合しやすくなるとの知見につながった。

以上のように第 1 年次においては先行研究の再検討と実際の授業の記録・分析を通して、具体的な場面の数量関係を記述するということが変数を早い段階で学習する際の重要な視点であること、また算数の数量関係の学習は変量というアイデアを導入し、その変量の記述として変数を関連づけることで変数的な扱いとして統合できる可能性があることが見いだされた。

第 2 年次は主として、中学校の文字を利用する単元の授業の記録とその分析が行われた。具体的には文字の利用が始まり、それを用いて方程式、関数の学習が進められる中学校 1 年の 1 クラスについて 3 単元(文字式、1 次方程式、比例と反比例)の授業を合計 44 時間分、また中学校 2 年および 3 年の関数単元の授業それぞれを 17 時間分と 20 時間分ビデオカメラを用いて記録した。関数領域の学習においては、具体的な場面を数式により記述したり、それを用いて考察をするような学習の場合には、生徒は変数に値を代入したり、そこから試行錯誤的な推論を用いたりしながら、自由な発想を行うことが見いだされた。例えば、中学校 3 年の授業ではレーのバトンパスを関数を用いて考える場面があったが、場面に走るという動きがあり、そこに時間やスタート地点からの距離といった変量が自然に含まれることもあり、変数を変数で記述し、そのいろいろな値の場合を考えるなどして、多様な考え方を展開していた。さらにタブレット端末に入れたグラフを動的に扱えるソフトウェアを利用することで、関数の式の係数にあたる量を変化させながら試行錯誤的に考えるようすも見られ、係数のようなパラメータを変数的に扱うという考え方も自然に表れていた。同様に、1 年の比例や反比例の授業においても、具体的な場面を扱っている場合には、自由な発想が見られた。例えば反比例の学習において天秤の左腕の 24 cm の位置に 1 g のおもりをつけた状態を提示し、釣り合わせるためにはどの位置に何 g のおもりをつけるとよいかを考えさせた際、おもりをつける位置がいくつあるかを問うと生徒から「無限にある」との答えが出されたり、位置を示す x の値が負の場合を教師が取り上げる前に負の範囲への拡張を自然に行ったり、さらには x の値を半分にするを続けることでおもりの重さをいくらでも重くすることができ、0.000024 cm の位置であれば 1 t のおもりで釣り合わせることができることなどの考えが出された。また現実場面ではないが、タブレット上でグラフがかけるソフトウェアを用いて双曲線のグラフを確認していた際には、反比例の比例定数を負にするという考え方が生徒から自然に出されていた。他方で比例や反比例を文字式を中心として扱って学習する場面では、簡単な場合にも比例定数を誤ったり、表がかけながら立式を間違ったり、グラフの基本的な特徴を誤ってかいていたり、さらには反比例かの判断をする際に減少しているから反比例だという典型的な誤答が現れるようになった。こうした生徒の反応の違いから、変量が想定でき、それをもとに思考を進める場面や、ソフトウェアのように係数を変数的に扱いやすい環境においては生徒は変数に様々な値を想定するような思考ができるが、式を中心とした学習場面になると式中の文字にいくつかの値を自分で想定して代入していくことができにくくなることが示唆された。

こうした傾向は方程式の学習にもおいても見られた。中学校 1 年の方程式単元においては、導入時には変数は具体的な場面の変量を記述しており、そのため文字にいくつかの値を想定して考えることを教師も教科書も行うが、学習が進み方程式の解法を考える際には文字式を操作して解を求めることになる。単元最後にある方程式の利用の学習では、基本的には提示された場面から方程式を作り、それを解法に基づいて解いて問題の答える求めることが期待されている。しかし実際の生徒の学習のようすを記録し、分析すると、単元最後の学習であるにも関わらず、未知数で表すことが期待される数量を変数的に扱い、その数量のいくつかの値を想定する中で場面を理解したり、問われた答えを求めるようすが見られた。例えばいわゆる追いつき算に当たる問題では、登場人物の動きがあり変量として捉えやすいこともあり、進んだ距離を変数的に扱い、いくつかの値を想定して表にまとめることを通して情報を整理する生徒が複数見られた。また影の長さに関する比の問題やいわゆる過不足算に当たる問題では追いつき算のような明確な変数が含まれるわけではないにも関わらず、問題となっている数量を変数的に扱い、そのいろいろな値を想定してやはり表にまとめて考える生徒が複数見られた。こうした生徒の学

習のようすは Functional Approach で提唱されていたことを生徒が自然に行っていることを示すものであり、またそうした生徒のようすから、関数の場合と同様、具体的場面を記述することになる学習では生徒は変数的な考え方が自然に行え、それが生徒の思考を促進するものとなりうることを示唆された。

以上のような第 2 年次の結果から、変数の記述として変数を扱うことが生徒にとっては自然な発想であるのに対し、場面などを伴わずに式中に現れる文字を変数として扱う際には生徒がそれを十分に制御できない傾向があることが示唆され、変数に関してもパターンの記述からパターンの対象化に相当するような移行が算数から中学校数学の間に存在しうること、したがってその移行を考慮したカリキュラム構成の枠組みが必要であることが見いだされた。

第 3 年次では前年度の知見を受けて、文字の利用に関わりパターンの記述からパターンの対象化に相当するような移行という観点から、改めてカリキュラムの検討をまず行った。その際、文字の利用に関わり、数の世界での現象を記述するメタレベルでの文字の利用と文字自体を操作の対象とする対象レベルでの利用を区別する海外での先行研究を、わが国の算数・数学教育の現状に合うように修正し、現実場面の变量を記述する意味でのメタレベルを追加した枠組みを構成した。それに基づいて現行の教科書を検討した結果、小学校算数では場面に対してメタレベルでの文字の利用については多くの経験が用意されており、それは中学校数学にもつながっていること、他方、中学校で文字自体を自立した対象として扱うことが単元の途中から求められているにも関わらず、そうした移行が明確には意図された書き方に教科書がなっていないことが見いだされた。説明の段階ではメタレベルでの利用がされている一方で、特に何の説明もないまま練習問題では急に対象レベルでの利用が要求され、それにより暗黙的に移行が起こることが期待されるという展開が基本的になされていた。さらにこの枠組みをもとに第 2 年次に収集した中学校 1 年の関数領域の授業を分析し直したところ、具体的場面を提示してそこに含まれる変数を変数により記述するという経験は多く見られるのに対し、場面を伴わずに式中の文字を変数として扱うことが要求される以前に、文字自体を対象として、それを変数とするためにいろいろな値を学習者が意識的に代入するという経験は授業でも少なく、場面を伴わない状況で文字を変数として扱えるようにするような移行が意図的に授業に組み入れられていないことが見いだされた。そこから、こうした変数をそれ自体として扱うことの経験の不足が、関数の学習場面で見られたような、場面がない状況で比例や反比例の式を扱う際に生徒が不適切な反応をしやすくなる原因の 1 つとして示唆された。

以上のような先行研究の検討、現行のカリキュラムの分析、実際の授業やそこでの学習のようすについての分析から得られた結果を総合したときに、カリキュラムを展開していくための次のような展開の原理を含む枠組みが考えられた。小学校高学年の算数から中学校 1 年数学の新しい内容の導入部においては変数を記述するものとして変数をメタレベルで扱う。その場合は場面中の変化により変数には自然に複数の値が割り当てられることになる。ただし算数の数量関係の学習では変数を特性として持つ対象が明確でない場合もあるので、対象を明確化し、その特性を示す値が変数として意識されるような扱い方とする。他方で中学校の学習では導入で変数を記述するものとして扱われた変数を、自立した対象として扱うように移行を行い、それ以後は変数を対象レベルで扱うようディスコースの変更を意図的に行う。この段階では場面から変数に自然に値が割り当てられるものではないことから、利用者が意識をして値を代入していくことが求められる。また新たな数学的对象が学習で扱われる際にはそれを教師が明示的に提示する方がよいとする先行研究を考慮すると、この移行を従前のように暗黙的に行うのではなく、学習の対象が変更されたことを明確にすること、その後は変更されたディスコースとしての整合性を保つことが重要であり、したがってこの枠組みでは、移行の明確化と移行後の新たなディスコースを維持した学習とがその構成要素として含まれる。

この原理に基づく枠組みを具体化するために、特に変数の移行が問題となる中学校 1 年の関数単元について、1 単元分の学習活動を構成した。従前のカリキュラムと大きく異なる主な点としては、まず単元を通した変域の重視がある。具体的場面を伴わなくなった際に文字にいろいろな値を代入し変数として生徒が意識できるよう、教科書では変域として言及しない数全体の集合の場合にも変域について言及し、変数の対象レベルでの利用を促進する。また変域を数直線だけでなくベン図のような表現によっても記述することにより値の集合として生徒に意識させ、変数を対象レベルで扱うようになった際に変数のいろいろな値を“とってくる”場としてイメージしやすくする。変数が対象レベルになることで変数を含む式で表現される比例、反比例も対象レベルに移行すると考え、算数的な現実場面についてのメタレベルからの移行を明示的に生徒に提示する。そこからの展開として、比例や反比例の諸性質を表の数値から帰納的に示すよりも対象レベルとなった式をもとに導出したり、グラフをかく場合にも対象レベルとなった変数にいろいろな値を代入することを重視し、原点を 1 点を結びといった簡易なかき方を学習した後も、変数への複数の値の代入を一貫して奨励し続けたりする。ただし対象レベルとなった変数や関数の式を中心に扱うことになった結果、変量のときのような動的側面が捉えにくくなるので、それをコンピュータソフトの利用により補い、変数への多くの値の代入をソフトウェア上で遂行することで、対象レベルでの変数や式の扱いの中でも動的側面を生徒が経験できるようにも配慮した。

このようにして原理を示す枠組みを学習活動として具体化した場合、変数の対象レベルを重視するが故に、式中心の扱いとなり、具体的場面を欠く抽象的な話題となるため、生徒にとっ

て理解可能であるかが危惧された。そこで、構成された学習活動を実際の中学校の授業として実施し、その全 16 時間の授業および生徒の学習のようすをビデオカメラにより記録した。学校の年間計画の関係で授業の実施が最終年度の 12 月となりデータの分析を年度内に完了することができなかったが、実施した授業者への聞き取りからは、教科書に基づく従来の指導に比べて指導がしにくいといったこともなく、生徒が特別理解しにくいというようすもみられなかったとされた。またビデオの記録からも、例えば単元の最後の方になっても、変数に多くの値を代入してグラフをかいたり確認したりするようすが見られ、変数を対象レベルで扱うことが生徒に受容されたと考えられるようすが確認された。

以上より、算数の段階から具体的場面に対するメタレベルで扱ってきた変数を、中学校の学習の途中で対象レベルへの扱いに移行するという基本的枠組みが、実際の学習においても適用可能なものであることが示唆されると考えられた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 6 件)

1. 布川和彦. (2017). 昭和 40 年代の中学校教科書に見られる方程式と関数とを関連づける記述について. 上越数学教育研究, 32, pp. 1-10. 査読無
2. 布川和彦, 磯野正人. (2017). 単位量当たりの大きさの量的側面に関わる学習活動. 数学教育学論究(日本数学教育学会), 99, pp. 25-32. 査読有
3. 布川 和彦, 青柳 潤. (2018). 1 次方程式の学習に見られる変数的な扱い. 上越数学教育研究, 33, pp. 1-10. 査読無
4. 布川 和彦. (2018). 具体的場面の数量関係と学習の対象としての関数. 日本数学教育学会春期研究大会論文集, 6, 105-112. 査読無
5. 布川 和彦. (2019). メタレベルと対象レベルの観点から見た学校数学における文字の利用. 上越教育大学研究紀要, 38 (2), 309-320. 査読無
6. 布川 和彦, 青柳 潤. (2018). 数学=パターンの科学の考えに基づく授業デザイン：中学校 1 年「比例と反比例」の場合. 上越数学教育研究, 34, pp. 1-12. 査読無

〔学会発表〕(計 3 件)

1. 布川和彦, 磯野正人. 単位量当たりの大きさの量的側面に関わる学習活動. 日本数学教育学会, 2017 年 11 月 4 日, 愛知教育大学.
2. 布川和彦. 具体的場面の数量関係と学習の対象としての関数. 日本数学教育学会, 2018 年 6 月 10 日, 千葉大学.
3. 布川和彦, 青柳潤. 中学校の授業における変数に関わる経験：変数導入と比例の授業の考察から. 日本数学教育学会, 2018 年 11 月 17 日, 千葉大学.

〔その他〕

ホームページ等

http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/function/functions.html

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：磯野正人、青柳潤

ローマ字氏名：Isono Masato, Aoyagi Jun

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。