

令和 2 年 5 月 28 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K03553

研究課題名(和文) 戦略が整数である非協力ゲームの純粋戦略均衡の存在とその経済学への応用

研究課題名(英文) Existence of Equilibria in Pure Strategies and Its Applications to Economics
When the Set of Strategies is an Integer Interval

研究代表者

渡辺 隆裕 (Watanabe, Takahiro)

首都大学東京・経営学研究科・教授

研究者番号：70220895

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクトな戦略集合を持つ n 人非協力ゲームは、利得関数が自己の戦略に関し準凹で、かつ戦略の組に対して連続であれば純粋戦略均衡が存在するという基本的な定理が知られている。しかしながら、現実の経済では価格や生産量などのプレイヤーの戦略は整数であり、そのような離散モデルでの均衡の存在条件については、まだ明らかになっていないことが多い。本研究は、戦略集合が有限である整数区間の非協力ゲームに対して、純粋戦略均衡が存在するゲームのクラスや十分条件を明らかにした。またこの条件を価格や生産量が整数値であるの経済モデルに応用し、純粋戦略均衡が存在する条件を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ゲーム理論における解であるナッシュ均衡は必ず存在するという基本定理がある。しかしこの定理は、価格や生産量などの戦略変数が実数であるか、または確率を用いた混合戦略を認めるかのどちらかの必要がある。本研究では、現実の社会・経済モデルに即して(1)戦略変数が整数であり、なおかつ(2)確率を用いない戦略である純粋戦略を考え、そのナッシュ均衡が存在する条件について明らかにした。

研究成果の概要(英文)：It is known that a pure strategy equilibrium in an n -person non-cooperative game with a compact strategy set exists if the payoff function of each player is quasi-concave with respect to its own strategy and continuous in the profile of strategies. However, in the real economy, players' strategies such as price and the amount of goods are integers. The existence condition of equilibrium in such a discrete model is often not clear yet. This study examined the class and sufficient conditions of games in which a pure strategic equilibrium exists when the set of strategies is an integer interval when the strategy set is finite. We also applied this condition to an economic model in which prices and production quantities are integers, and clarified the conditions under which pure strategic equilibrium exists.

研究分野：ゲーム理論

キーワード：ゲーム理論 均衡の存在 非協力ゲーム 純粋戦略均衡 離散数学

1. 研究開始当初の背景

近年の経済学において離散数学を用いた理論構築の必要性は高まってきている。その理由の1つはコンピュータを用いたシミュレーションや数値計算による分析が盛んになり、そのための理論構築が必要となってきたこと。もう1つの理由は、計量経済学や実験経済学の発展により、離散的データから、離散値のパラメータや戦略を推定する分析が増加し、これらの計量や統計理論の発展と統合的な経済理論のモデル構築が問われていることである。

「コンパクトな戦略集合を持つ n 人非協力ゲームにおいて、利得関数が自己の戦略に関し準凹関数で、かつ利得関数が戦略の組に対して連続関数であれば、純粋戦略均衡が存在する」というナッシュ均衡の存在定理(以下、ゲームの基本定理)は、一般均衡の存在定理と共に経済理論の基礎をなすものとして知られ、数多くの分野で応用されている。しかしながら、戦略集合が離散的である場合、この基本的定理に対応する「均衡の存在定理」は知られていない。このような例は、離散的な経済理論の構築が必要である1つの例として挙げることができる。

経済学の多くの問題は、戦略集合が1次元の実数区間(もしくは n 次元の凸集合)のゲームとしてモデル化されることが多い。例えば、ベルトラン競争では価格、クールノー競争では生産量、公共財生産問題における自発的支払額、企業の立地モデルでの立地位置、製品差別化競争の差別化度や品質がその戦略である。しかしながら現実には、戦略(価格、生産量、自発的支払額等)は整数値であることが多く、戦略集合は整数区間と考えられる。

これらのことを考慮すると、経済学モデルへの応用のためには、戦略集合が整数区間であるような n 人非協力ゲームにおいて、純粋戦略均衡が存在するゲームのクラスや十分条件を明らかにすることが、研究の重要なテーマであると考えられる。

2. 研究の目的

本研究は、戦略集合が有界な整数区間の非協力ゲームに対して、純粋戦略均衡が存在するゲームのクラスや十分条件を明らかにすることを目的とする。またその条件を価格や生産量が整数値である経済モデルに応用し、そのモデルにおいて純粋戦略均衡が存在する十分条件を明らかにすることを目的とする。特に、コンパクトなゲームの均衡の存在の基本定理と対応した定理を構築したいと考えた。

さらに本研究では、上記成果を経済モデル(クールノー競争、ベルトラン競争、公共財の生産問題、立地問題等)に応用し、産業組織論・公共経済学・空間経済学等への応用を目指すことも目的とした。

3. 研究の方法

本研究の開始前において、研究協力者の飯村は有限集合上の不動点定理(以下、離散不動点定理)を発表している。また研究代表者の渡辺と飯村は、対称な有限ゲームについて研究を行い(1)利得関数が整凹関数であるゲームには純粋戦略均衡が存在するという結果、および(2)「戦略の他者への外部性や競争性」がある場合の均衡の存在条件を示した。

本研究では、上記の既存研究を発展させるという研究方法を用いた。具体的には以下の通りである。

- (1)離散不動点定理の発展させることによる純粋戦略均衡の存在定理の証明。
- (2)「戦略の他者への外部性や競争性」があるゲームの均衡の存在条件。ゲームのクラスや性質を整理して、存在条件の本質を明らかにしてゆく。
- (3)定理の経済モデルへの応用

4. 研究成果

本研究によって、以下の成果を得た。

4.1 弱外部性を持つゲームの純粋戦略均衡の存在定理

弱外部性(weak payoff externality, WPE)と呼ばれる性質を持つ対称ゲームに関して、対称均衡と対称進化均衡の同一性を示し、有限ゲームにおいては均衡が存在することを証明した。また、その条件を緩めた部分的外部性(partial WPE)について考察し、戦略が無限であるときを含めて、均衡が存在する条件を示した。本成果は、Iimura, Maruta and Watanabe (2019)として、Economic Theory Bulletinに掲載された。

4.2 2 戦略 n 人ゲームに対する純粋戦略均衡とポテンシャルの数学的構造

2 戦略 n 人対称ゲームには純粋戦略均衡が存在することが知られているが、本研究ではその構造を抽象化し、戦略の置換やゲームの同値性などを考えることによって、2 戦略 n 人（対称とは限らない）ゲームが純粋戦略均衡を持つための条件を考察した。結果として、各プレイヤーの他プレイヤーの戦略が与えられたときの限界利得（2 戦略の利得の差）によって、3 つの条件を提示した。このうち 2 つの条件は、ゲームに準強ナッシュ均衡 (semi-strict Nash equilibrium) と呼ばれる純粋戦略均衡が存在する条件を与える。もう 1 つの条件は、ゲームにポテンシャル関数が存在する条件を与える（ゲームにポテンシャル関数が存在すれば、そのゲームはポテンシャルゲームと呼ばれ、純粋戦略均衡が存在する）。これらの条件を、市場参入ゲーム（各企業が市場に参入するか否かを二者択一で選ぶ）、役割割当ゲーム（各プレイヤーが、2 つの役割のどちらかを選び利得が決まる）、最適シェアゲームと呼ばれる 3 つのゲームに応用し、それらのゲームに純粋戦略均衡が存在する条件を示した。本研究は渡辺、飯村及び von Mouche 氏との国際共同研究であり、成果は Imura, Mouche and Watanabe (2018) として *Discrete Applied Mathematics* に掲載された。

4.2 一対可能解性を持つゲームの純粋戦略均衡の存在定理

2 人対称ゲームに関する一対可解性 (pairwise solvable, 以下 PS ゲーム) という性質を定義し、PS ゲームに関する純粋戦略均衡の存在条件を調べて成果を得た。研究ではまず、この PS ゲームが既に私達が研究してきた WUC ゲーム、UC ゲームなどのゲームを含むと共に零和ゲームを含む広いクラスであること、さらにレント・シーキングゲーム、2 人立地ゲームなど経済学的に応用範囲の広い重要なモデルを含むことを示した。PS ゲームは、均衡が可換性 (interchangeability) を満たすゲームであり、もし均衡が存在すればナッシュの意味での「可解性」を満足すると言える。しかしながら「じゃんけん」は PS ゲームであり、そのことから分かるように PS ゲームは必ずしも純粋戦略均衡を持つとは限らない。本研究では、利得関数の「対角における準凹性 (quasi-concavity at the diagonal)」という条件を定義し、PS ゲームがこの条件を満たせば純粋戦略均衡が存在することを示した。この「対角における準凹性」は準凹性を弱めた条件であり、その結果「利得関数が準凹性を満たす PS ゲームは、純粋戦略均衡に関して可解である」ということを示すことができた。またこのときゲームは支配可解であるということも示すことができた。成果は Imura, Maruta and Watanabe (2020) として、*International Journal of Game Theory* に採択され、現在、オンラインで公開されている。

また 4.1 と 4.2 の成果を中心とした、近年の研究成果を一般向けにまとめ 2019 年度日本 OR 学会関西支部シンポジウム（ゲーム理論から学ぶ：人類への知見）において講演を行った。その内容を解説論文にまとめ、渡辺 (2020) として *オペレーションズ・リサーチ誌* に掲載している。

4.3 2 人施設配置問題における最適反応ポテンシャル関数の存在証明

ホテリングゲームとして知られる単純な施設配置問題に対して、プレイヤーが 2 人の場合の距離に依存して需要が減少するモデルを考察した。そのゲームに対し、順序ポテンシャルゲーム (ordinal potential game) とはならないことを示すとともに、最適反応ポテンシャルゲームであることを示した。この結果は戦略が離散集合であっても成立し、戦略が整数である非協力ゲームの純粋戦略均衡の存在を示すとともに、その経済学への応用を示したこととなる。本研究は渡辺、飯村及び von Mouche 氏との国際共同研究であり、成果は Imura, Mouche and Watanabe (2017) として *Economics Letters* に掲載された。

4.4 有限の戦略・期間・状態を持つマルコフゲームに対する純粋戦略均衡の存在定理

有限の戦略・期間・状態を持つマルコフゲームについて、各状態での成分ゲームが優モジュラゲームであるときに、純粋戦略均衡が存在する十分条件を求めた。過去の研究では、戦略と状態の数が無限である無限期間マルコフゲームに対して同様のゲームにおける存在条件が考察されているが、そこでは優対角条件と呼ばれる条件が課され均衡点が唯一であることが仮定されており、さらには状態と戦略が一次元であることも仮定されていた。本論文では、優対角条件を課さず複数均衡を許し、さらに状態と戦略が多次元であることを許して均衡の存在の十分条件を示した。また応用として、投資により需要が増加する多期間価格競争の寡占モデルに条件を適用して、その均衡の存在条件を導出した。成果は Yamashita and Watanabe (2017) として *Journal of the Operations Research Society in Japan* の招待論文として掲載された。

4.5 純粋戦略均衡の存在定理の証明

有限ゲームにおける純粋戦略均衡の存在定理を証明した。まず既存研究を拡張し、最適反応方向関数（既存研究では「最適反応関数」）が方向保存性を持つときに均衡が存在することを証明した。次に、利得関数が自己の戦略に対して凹関数・擬凹関数である場合に、現在の利得関数の自己の戦略に対する勾配条件を用いて、上記の方向保存性条件を書き直した。またさらにこの書き直した条件を「戦略がコンパクト集合であるときの関数の連続性に相似する条件」として表現し、新たな定理とした。この結果は "Existence of Pure Strategy Equilibria in Finite Quasi-concave Games" という Discussion Paper にまとめ、また 2016 年 7 月に開催されたゲーム理論

国際学会(オランダ)で発表した。

参考文献

渡辺隆裕(2020)「純粋戦略で可解な対称ゲーム - 純粋戦略均衡の存在と交換可能性」, オペレーションズ・リサーチ, vol.65, No. 5 260-265.

T. Iimura, T. Maruta and T. Watanabe (2019) “Equilibria in games with weak payoff externalities,” *Economic Theory Bulletin*, vol. 7, 245-258, DOI:10.1007/s40505-018-0157-4.

T. Iimura, T. Maruta and Takahiro Watanabe (2020) “Two-person pairwise solvable games,” *International Journal of Game Theory*, Available Online, DOI:10.1007/s00182-020-00709-1.

T. Iimura, P. von Mouche and T. Watanabe (2017) “Best-reply potential for two-person one-dimensional pure location game,” *Economics Letters*, Volume 160, 73-77, DOI: 10.1016/j.econlet.2017.08.025.

T. Iimura, P. von Mouche and T. Watanabe (2018) “Binary action games: Deviation properties, semi-strict equilibria and potentials,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 251, No.31, 57-68, DOI:10.1016/j.dam.2018.06.005 .

H. Yamashita and T. Watanabe (2017) “Existence of a Pure Strategy Equilibrium in Markov Games with Strategic Complementarities for Finite Actions and States,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 60, No. 2, 201--214, DOI:10.15807/jorsj.60.201

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Takuya Iimura, Pierre von Mouche and Takahiro Watanabe	4. 巻 251
2. 論文標題 Binary action games: Deviation properties, semi-strict equilibria and potentials,	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 57-68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) DOI:10.1016/j.dam.2018.06.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takuya Iimura, Pierre von Mouche and Takahiro Watanabe	4. 巻 160
2. 論文標題 Best-reply potential for two-person one-dimensional pure location game	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Economics Letters	6. 最初と最後の頁 73-77
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.econlet.2017.08.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hideaki Yamashita and Takahiro Watanabe	4. 巻 60
2. 論文標題 Existence of a Pure Strategy Equilibrium in Markov Games with Strategic Complementarities for Finite Actions and States	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society of Japan	6. 最初と最後の頁 201-214
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15807/jorsj.60.201	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takuya Iimura and Takahiro Watanabe	4. 巻 -
2. 論文標題 Pure strategy equilibria in finite symmetric concave games and an application to symmetric discrete Cournot games	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 in Equilibrium Theory for Cournot Oligopolies and Related Games: Essays in Honour of Koji Okuguchi	6. 最初と最後の頁 85-96
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-29254-0_7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuya Iimura, Pierre von Mouche and Takahiro Watanabe	4. 巻 160
2. 論文標題 Best-reply potential for two-person one-dimensional pure location game	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Economics Letters,	6. 最初と最後の頁 57-68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.econlet.2017.08.025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takuya Iimura, Toshimasa Maruta, and Takahiro Watanabe	4. 巻 7
2. 論文標題 Equilibria in games with weak payoff externalities	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Economic Theory Bulletin	6. 最初と最後の頁 245-258
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40505-018-0157-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuya Iimura, Toshimasa Maruta, and Takahiro Watanabe	4. 巻 -
2. 論文標題 Two-person pairwise solvable games	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Journal of Game Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00182-020-00709-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takuya Iimura, Pierre von Mouche and Takahiro Watanabe	4. 巻 251
2. 論文標題 Binary action games: deviation properties, semi-strict equilibria and potentials	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 57-68
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.dam.2018.06.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Takahiro Watanabe
2. 発表標題 Existence of Pure Strategy Equilibria in Finite Quasiconcave Games
3. 学会等名 GAMES 2016 (the 5th World Congress of the Game Theory Society) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 渡辺 隆裕
2. 発表標題 純粋戦略で可解な対称ゲーム - 純粋戦略均衡の存在と交換可能性
3. 学会等名 2019年度日本OR学会関西支部シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	飯村 卓也 (Iimura Takuya) (50279634)	東京都立大学・経営学研究科・教授 (22604)	