

令和 元年 6 月 13 日現在

機関番号：10102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K04647

研究課題名(和文) 探究的な学習活動を促進する操作的証明の学習環境の研究開発

研究課題名(英文) Research and development of learning environment of operative proof that promotes exploratory learning activities

研究代表者

佐々 祐之 (SASA, HIROYUKI)

北海道教育大学・教育学部・教授

研究者番号：30315387

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)： 探究的な学習活動を促進する学習環境のデザインに当たって、本質的学習肝要理論の提唱者であるE.Ch.Wittmann氏と意見交換を行い理論的枠組みを検討するとともに、中学生を対象とした学習環境のデザインを行い、検証授業を行った。これらの結果は論文としてまとめ、学会において発表している。また、操作的証明を用いた探究的な学習活動のデザインも行い、小学校教師を対象とした教員研修で試行的に実施した。その結果、1つの証明の活動から別の命題を次々と生成するという道具的創成の様相を観察することができ、操作的証明の教員養成・研修への活用の可能性を見いだすことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

探究的な学習活動を促進するために操作的証明という方法論が有効に機能することを、実証的研究を通して明らかにすることができた。また、教員研修での操作的証明を用いた学習環境の活用によって道具的創成の様相を観察することができたことは、これらの学習環境のデザインが教員養成や教員研修へと応用可能であることを示しており、教師教育の視点での成果であるといえる。

研究成果の概要(英文)： In this Research I was able to exchange ideas with Prof. E. Ch. Wittmann (proponent of the Substantial Learning Environment Theory) about the design of the Substantial Learning Environment. Then, I designed a Substantial Learning Environment for junior high school students and verified the effect by experiment class. And also I designed a Substantial Learning Environment using Operative Proof and used it in teacher training. Then I was able to observe instrumental genesis in learning activities. This shows that the Substantial Learning Environment using the Operative Proof can be used for teacher education.

研究分野：数学教育学

キーワード： 探究的な学習活動 操作的証明 道具的創成 学習環境デザイン 教員研修 教員養成

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

一般に、論証指導は、数学的命題の証明(演繹的推論)を記述する学習であり、中学校第2学年から本格的に指導される。しかし、現状として行われている論証指導は、図形の性質の証明が中心であり、文字を用いた代数的な証明に関しては、「説明」として扱われる程度である。また、その指導に関しても、ともすれば「証明の書き方」の指導が主となっている場合があり、論証指導としての成果が十分なものであるとは言えない状況にある。

そのような中で、論証指導を「証明を書くこと」だけに焦点化するのではなく、数学的パターンの探究や発見、証明の構想や構成、振り返りや発展までを含めて「証明すること(Proving)」の学習と広く捉える傾向が強まっている。

これまで継続して研究してきた「操作的証明(Operative proof)」の概念は、形式的な証明の記述を求めるのではなく、操作による直観的な理解を許して証明することを推進しようとする概念で、形式的証明が学習する前段階の児童生徒に対して、有効な推論の方法を与えるものであった。また、操作的証明による学習活動では、一旦理解した操作的証明を基に、次々と新しい数学的パターンを発見するといった「道具的創成(Instrumental genesis)」という現象も確認されている。

これら操作的証明に関する研究の知見を活かすことによって、より効果的な学習活動をデザインすることが可能になると考えられる。

### 2. 研究の目的

本研究では、本質的学習環境(Substantial Learning Environment)の理論を提唱した E. Ch. Wittmann のいう「操作的証明(Operative proof)」の概念や、それによって引き起こされる「道具的創成(Instrumental genesis)」という現象の知見を活かして、探究的な学習活動を促進する学習環境のデザインを行うこととした。特に、学習環境デザインに当たっては、これまでの研究の知見を活かしやすいように、文字を用いた代数的証明を題材とすることとした。

上記のような研究の目的を達成するため、次のような具体的目標を設定した。

(1) 「操作的証明」および「道具的創成」の概念の整理と、学習環境デザインの枠組みの検討

これまで継続してきた「操作的証明」に関する研究を振り返るとともに、「道具的創成」に関する知見を整理し、探究的な学習活動を促進するための学習環境デザインには、どのような理論的枠組みが有効であるかを検討する。

(2) (1)の知見を活かした学習環境のデザインと実証的研究

上記(1)で整理した理論的枠組みを基に、文字を用いた代数的証明を題材とした具体的な学習環境をデザインし、実験授業とその分析を通して、効果の検証を行う。

(3) 学習環境デザインのリデザインと活用

学習環境のデザインとその実証的研究により得られた知見を活かして、さらに探究的な学習活動を促進する学習環境をデザインするとともに、それらの活用方法についても検討を行う。

### 3. 研究の方法

研究の目的で示した3つの具体的目標を達成するため、以下の方法で研究に取り組んだ。

(1) 理論的枠組みの検討

探究的な学習活動を促進する学習環境デザインの理論的枠組みを検討するため、本質的学習環境理論の提唱者であり、「操作的証明」の概念の提唱者でもあるドルトムント大学の E. Ch. Wittmann 教授と直接意見交換を行った。ドイツのハンブルグで開催された第13回数学教育国際会議(ICME13)に参加した際に、直接議論する機会を得ることができ、また、日本国内の全国数学教育学会に講演者として来日した際にも、詳細なアイデアについて意見交換を行うことができた。

また、学習環境のデザインに当たって題材とした「文字を用いた式」に関する先行研究として、三輪辰郎教授の「文字式利用のモデル」を再検討し、証明の構想と構成に関する理論的枠組みを再構築した。

(2) 学習環境のデザインと実証的研究

E. Ch. Wittmann 教授との意見交換や三輪辰郎教授の理論の再検討から得られた知見を活かして、中学校第3学年を対象とした「文字を用いた説明」の学習環境をデザインし、本学の附属中学校で実験授業を行った。学習環境のデザインでは、「代数的証明の構想の段階で、どのような式変形を構想するか」という部分にも焦点を当てるため、少し難易度の高い数学的パターンを用いた。そのため、おはじきや位取り表といった具体的な道具を用いての操作的証明は活用できなかったが、具体的な数の操作などを通して、「数学的パターンの発見」、「証明の構想・構成」、「振り返りと新たな命題の発見」といった探究的な学習活動のサイクルを実現することができた。

(3) 学習環境のリデザインと活用

実験授業は、中学校第3学年の生徒を対象に実施したが、操作的証明や道具的創成の要素をより強調するため、これまで研究してきた操作的証明の事例から、「ANNA 数」「魔法の数 3087」といった題材を用いた学習環境のリデザインを行った。リデザインした学習環境については、

教師教育への効果の検証を意図して、教員研修での活用を試みた。小学校教師を対象とした教員研修において、デザインした学習環境を用いた体験的学習活動を実施するとともに、そこで見られた学習活動の様相を観察した。

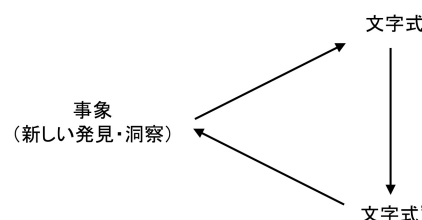
#### 4. 研究成果

3年間を通じた研究で得られた成果は、次の通りである。

##### (1) 探究的な学習活動を促進する学習環境デザインの理論的枠組み

探究的な学習活動を促進する学習環境デザインの理論的枠組みに関しては、主として E. Ch. Wittmann 教授による本質的学習環境理論、中でも操作的証明の概念に関する理論の精査、及び、三輪辰郎氏の「文字式の利用のモデル」の再検討によって行った。本質的学習環境理論に関する Wittmann 教授との意見交換では、操作的証明の前提条件として「数学的パターンの探究という学習活動に組み込まれていること」「適切に表現された数学的対象が必要であること」という条件に加えて、探究する数学的パターンがよく練られた数学的題材であることの必要性が強調された。

また、三輪辰郎教授の「文字式利用のモデル」の再検討では、図1に示すモデルにおいて、事象を文字式に「表す」というプロセスは、初期の代数的証明の構想段階で実現され、文字式から新しい発見や洞察を得る「読む」という段階については、ある程度、証明したい命題の構造から構想段階に組み込むことができるが、最初に表現された文字式から結論を述べるための文字式への変形のプロセスは、何となく式変形を実行する 경우가多く、明確な構想を伴って証明の構成がなされているわけではないということが明らかとなった。



【図1:三輪(1996)の文字式利用のモデル】

これらの理論的枠組みの検討の結果、探究的な学習活動を促進する学習環境のデザインに当たっては、数学的パターンの発見に際して、よく練られた数学的題材を用意し、文字を用いた代数的証明の構成の段階でどのような式変形の方法を用いるのかといったことにも踏み込んだ証明の構想ができるよう、題材の工夫を行うことが必要であるということが示唆された。

##### (2) 探究的な学習活動を促進する学習環境デザインと実証的研究

学習環境デザインのための理論的枠組みの検討を受けて、具体的な学習環境のデザインと実験授業を通じた実証的研究を実施した。

今回の学習環境デザインで用いた題材は、「連続する4つの整数の積に1を加えた数は、真ん中の2つの整数の積から1を引いた数の2乗である」という命題である。中学校第3学年の生徒を対象とした学習環境のデザインではあったが、扱う数学的命題としては、やや難しいものであるといえる。このような複雑な数学的命題を題材とした理由は2つある。

1つは、数学的パターンの発見のためによく練られた題材であるということで、実際、実験授業においては、生徒がすぐに命題を発見してしまうのではなく、具体的な数をいろいろ試すことによって、パターンを見いだしていくという様子が観察された。

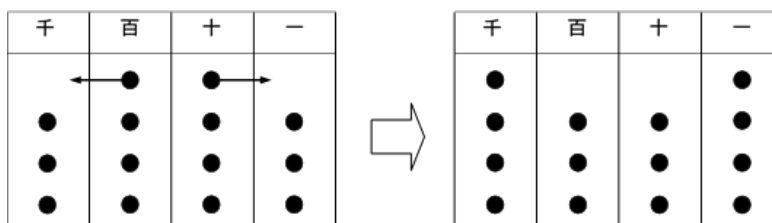
またもう1つの理由は、三輪の文字式利用のモデルで示された、最初に表現された文字式から結論を述べるための文字式への変形が具体的な構想のないまま進められることが多いという現状を受けて、最初の文字式から結論を述べるための文字式への変形が容易ではないという条件を満たす題材としたことである。実験授業では、最初に命題の前提を文字式に表す活動が容易に構想することができたが、結論を示す文字式への変形の仕方については、2通りの構想が出された。1つは  $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$  という最初の文字式を展開し、それらを実行の過程で適宜因数分解を行いながら結論を示す式  $\{(a+1) \times (a+2) - 1\}^2$  に変形していくというもので、もう1つは、最初の文字式  $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$  と結論を示す文字式  $\{(a+1) \times (a+2) - 1\}^2$  の両方をそれぞれ展開し、同じ文字式になることを示すというものであった。証明の構想の途中で協働的に議論を重ねながら、証明の記述としては前者のほうが簡潔に表現できるものの、途中の計算過程で技巧的な式変形が必要となるため、確実に証明を構成するためには後者の変更が有効であるということを発見していく生徒の様相を観察することができた。

今回の学習環境デザインにおいては、おはじきや位取り表といった具体的な道具を用いた操作的証明は用いなかったが、三輪の文字式利用のモデルを援用した探究的な学習活動のサイクルが実現されており、探究的な学習活動を促進する学習環境デザインに関する具体的な事例を得ることができた。なお、この学習環境のデザインとその実証的研究に関しては、論文としてまとめ、日本科学教育学会の第41回年会(2017年8月、サンポート高松)で研究発表を行っている。

##### (3) 探究的な学習活動を促進する学習環境デザインの教師教育への活用

探究的な学習活動を促進する学習環境のデザインをどのように活用していくかということについての検討と試行を行った。前述の中学校第3学年の生徒を対象とした学習環境デザインでは、操作的証明や道具的創成の要素が少なかつたため、小学校段階の児童を対象とした操作的証明の学習環境のデザインを行った。

題材としたのは、E. Ch. Wittmann 教授が操作的証明の概念の説明のために用いている「ANNA 数の数学的パターン」というものである。これは、2つの異なる1桁の自然数を選び、それらを並べて ANNA というように配置すると4桁の自然数を2種類作ることができる。これらの差を計算すると、 $891 \times (\text{最初に選んだ2つの自然数の差})$  になるという数学的パターンである。例えば、最初の2つの自然数として3と5を選んだとすると、3553、5335 という2つの ANNA 数をつくることができ、その差は、 $1782 = 891 \times (5-3)$  となる。子どもは、様々な自然数で ANNA 数の差を計算する中で、このような数学的パターンに気が付き、なぜそのような結果になるのかを説明するという学習活動である。理由の説明に関しては、中学校段階では文字を用いた代数的証明で処理することができるが、形式的な証明を学習する前の段階の子どもでも、おはじきと位取り表を用いた操作的証明によって、次のようにその理由を説明することができる。



【図2：おはじきと位取り表を用いた「ANNA 数」の操作的証明】

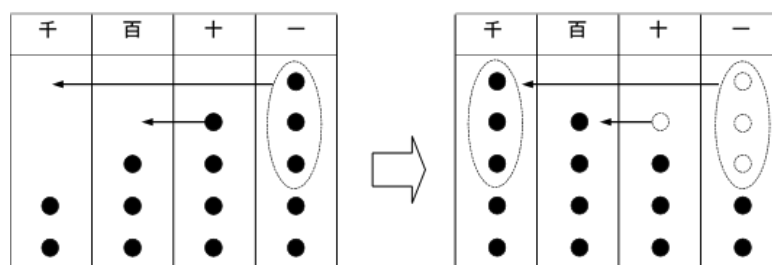
図2は、位取り表上におはじきで表した3443を、4334に変形する様子を示したものである。このとき位取り表上に表された数は、百の位から千の位へおはじきを1つ動かすので1000増えて100減り、十の位から一の位へおはじきを1つ動かすので10減って1増えることになる。これを式に表すと  $1000-100-10+1=891$  となり、2つの ANNA 数の差が891であることが説明できる。3553と5335の場合は、981増える操作を2回行うことになるので  $891 \times (5-3)$  だけ増えることになり、その差が求められるのである。

このような説明は、3443と4334、3553と5335といった具体的な数に対して行ったものであり、代数的証明のような一般性を有するものではないが、他の ANNA 数のときも操作としては同様の操作になることが認識できるので、一般性を持つ数学的命題の説明として機能するのである。

実際に、この学習環境を用いて小学校段階の児童を対象とした実験授業を行い、その効果を検証したかったが、実際には実験授業の実施が難しかったため、学習環境の教師教育への援用という意図も含めて、小学校教師を対象とした教員研修の場で、上記の学習環境を用いた探究的な学習活動の体験を実施した。その結果、操作的証明を用いた探究的な学習活動のサイクルが確認できただけでなく、ANNA 数の数学的パターンの操作的証明から様々な新しい数学的パターンを見いだすという「道具的創成」の様相を観察することができた。

例えば、ANNA 数の数学的パターンの説明におけるおはじきと位取り表の操作をアレンジすることによって、「2つの1桁の自然数を用いて作った ANNA 数の差は N と A の差の909倍になる」という「ANNA 数の数学的パターン」を発見したり、「各位の数字が連続するような4桁の自然数に3087を加えると、各位の数字の並びが逆になる」という「魔法の数3087の数学的パターン」を発見したりする参加者の姿が観察された。

「魔法の数3087の数学的パターン」の操作的証明は、次のように行うことができる。



【図3：おはじきと位取り表を用いた「魔法の数3087」の操作的証明】

図3は、位取り表上におはじきで表した2345を、5432に変形する様子を示したものである。このとき位取り表上に表された数は、一の位から千の位へ3つおはじきを動かすので3000増えて3減り、十の位から百の位へおはじきを1つ動かすので10減って100増えることになる。これを式に表すと  $3000-3+100-10=3087$  となり、2345に3087を加えると各位の数字の並びが逆になることが示されるのである。このような数学的パターンに対する操作的証明は、ANNA 数の操作的証明と同じ構造を持っており、一旦、ANNA 数の操作的証明の構造を理解してしまえば、それを基に次々と新しい数学的パターンを発見することができるのである。このような現象を Guin, Trouche(1999)や Artigue(2002)は「道具的創成 (Instrumental genesis)」と呼んでいるが、このような現象を、小学校教員を対象とした教員研修の中で観察することができた。このことは、操作的証明を用いた学習活動が道具的創成という現象を引き起こし、探究的な学習

活動のサイクルを実現することを示しており、小学校段階の児童に対しても応用する可能性があることを示している。また、このような探究的な学習活動のサイクルを教員養成・教員研修の場で活用していくことについても、1つの可能性を示すことができたといえよう。

#### (4) 今後の課題

操作的証明や道具的創成の知見を活かした探究的な学習活動を促進する学習環境のデザインを行うことを目指して研究を進めてきたが、文字を用いた代数的証明における探究的な学習活動の展開や、操作的証明を用いた探究的な学習活動のサイクルの実現に関しては、一定程度の成果を得ることができた。今後の課題としては、操作的証明を用いた学習環境の小学校段階の児童に対する活用を具体化すること、また、授業場面において探究的な学習活動を展開できる教員の養成・研修をどのように行っていくかということが考えられる。

#### 5. 主な発表論文等

##### 〔雑誌論文〕(計6件)

中川裕之, 佐々祐之, 榎本哲士, 科学教育の内容・活動に固有な非認知スキルの評価方法の開発 領域「数と式」における調査内容について, 日本科学教育学会年会論文集, 査読無し, 42, 2018, 165-166

佐々祐之, 田口哲, 佐川正人, 教員養成学の構築に関する基礎的研究 デザイン科学の視点から, 日本教育大学協会研究集会発表概要集, 査読無し, 2018, 172-173.

中川裕之, 佐々祐之, 課題探究として証明することを実現する指導法開発 領域「数と式」の枠組みの再検討と指導法の開発, 日本数学教育学会第5回春期研究大会論文集 創成型課題研究の部, 査読無し, 5, 2017, 9-14.

佐々祐之, 中川裕之, 課題探究として証明することの授業化と指導法の開発 領域「数と式」における第3学年の授業実践を通して, 日本科学教育学会年会論文集, 査読無し, 41, 2017, 45-48.

佐々祐之, 中川裕之, 課題探究として証明することのカリキュラム開発 領域「数と式」のカリキュラム開発の枠組みの再検討, 日本数学教育学会第4回春期研究大会論文集 創成型課題研究の部, 査読無し, 4, 2016, 157-162.

佐々祐之, 長谷川英和, 中学校数学における課題探究として証明することの授業化 領域「数と式」における第1学年の学習活動の具体化, 日本科学教育学会年会論文集, 査読無し, 40, 2016, 101-104.

##### 〔学会発表〕(計6件)

中川裕之, 佐々祐之, 榎本哲士, 科学教育の内容・活動に固有な非認知スキルの評価方法の開発 領域「数と式」における調査内容について, 日本科学教育学会第42回年会, 2018.

佐々祐之, 田口哲, 佐川正人, 教員養成学の構築に関する基礎的研究 デザイン科学の視点から, 平成30年度日本教育大学協会研究集会, 2018.

中川裕之, 佐々祐之, 課題探究として証明することを実現する指導法開発 領域「数と式」の枠組みの再検討と指導法の開発, 日本数学教育学会第5回春期研究大会, 2017.

佐々祐之, 中川裕之, 課題探究として証明することの授業化と指導法の開発 領域「数と式」における第3学年の授業実践を通して, 日本科学教育学会第41回年会, 2017.

佐々祐之, 中川裕之, 課題探究として証明することのカリキュラム開発 領域「数と式」のカリキュラム開発の枠組みの再検討, 日本数学教育学会第4回春期研究大会, 2016.

佐々祐之, 長谷川英和, 中学校数学における課題探究として証明することの授業化 領域「数と式」における第1学年の学習活動の具体化, 日本科学教育学会第40回年会, 2016.

##### 〔図書〕(計2件)

瀧ヶ平悠史, 佐々祐之, 末原久史, 本創研, 「見方・考え方」を働かせる算数授業, 東洋館出版社, 2018, 176.

永田潤一郎, 佐々祐之, 茅野公穂, 岩田耕司, 松元新一郎, 平成29年改訂 中学校教育課程実践講座 数学, 2018, 254.

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。