

令和 2 年 6 月 14 日現在

機関番号：12401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05054

研究課題名(和文) 表現論の観点から見た有限群のコホモロジー論

研究課題名(英文) Cohomology theory of finite groups from the viewpoint of representation theory

研究代表者

飛田 明彦(Hida, Akihiko)

埼玉大学・教育学部・教授

研究者番号：50272274

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、有限群に関する3種類の対象、分類空間の安定分解、素数 p に関する p -局所構造、そしてモジュラー表現の関係について調べることである。階数が 2 の有群 p -群、特に extra special p -群について、分類空間の安定分解における既約因子とその重複度やそれらの既約因子の $\text{mod } p$ コホモロジーを決定した。研究の手法としては、有限群のモジュラー表現及び両側 Burnside 多元環の表現と両側集合関手の理論を応用した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限群の分類空間の安定分解は両側 Burnside 多元環の表現論と結びつき、可換 p -群については1980年代に既に研究されている。最小の非可換群である位数が p の 3 乗の extra special p -群についても様々な研究され豊かな状況が見出されてきた。本研究では、モジュラー表現と両側集合関手の応用により、コホモロジー環の両側 Burnside 環上の加群としての既約組成因子を決定した。この結果は分類空間の安定分解についての結果として解釈することができ、ホモトピー論においても重要な情報を与えている。

研究成果の概要(英文)：In this research, we study the relation among the following three objects on finite groups, stable splitting of classifying space, p -local structure for a prime p , modular representations. We consider rank two p -groups, in particular, we study extra special p -groups. We determine the stable irreducible summands of stable splitting and the cohomology of the summand. We use the representations of double Burnside algebra and the theory of biset functors.

研究分野：有限群の表現論

キーワード：有限群の表現 モジュラー表現 有限群のコホモロジー 分類空間 両側 Burnside 環

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の背景の一つは、有限群の分類空間の安定分解とそのコホモロジーの分解である。

素数 p について、 p -群の分類空間の安定分解の問題は G. Carlsson による Segal 予想の解決を経て D. Benson、M. Feshbach、J. Martino、S. Priddy 等の研究により両側 Burnside 多元環の既約表現という代数的な問題と結びついていた。この方法によりいくつかの群の安定分解の因子が決定され、併せてコホモロジーについても研究されてきた。その中でも extra special p -群についてはとても複雑で興味深い対象であり、まだ解明されていない部分が多く残されている状況であった。

もう一つの背景は fusion system やモジュラー表現論とコホモロジーとの関係である。こちらについても両側 Burnside 多元環を通じての関係が指摘されてきたがまだ完全には解明されていない状況にある。

2. 研究の目的

本研究の目的は、代数的位相幾何学的側面から分類空間のホモトピー論、代数的な側面から有限群の構造と性質、表現論的な側面から有限群の表現論、これら 3 者の関係について表現論の立場から調べることである。分類空間のホモトピー論については有限群の分類空間の安定分解を研究対象とし、有限群の構造の観点からは素数 p に対する p -局所構造、つまり p -部分群とその共役関係や fusion system を研究対象とし、表現論の観点からは、有限群や有限次元多元環の表現論と関手圏の理論を研究対象とする。

具体的には、階数が 2 の有限 p -群について分類空間の安定分解とそのコホモロジーの分解をモジュラー表現と両側 Burnside 多元環の表現論、さらに両側関手の理論を応用して解析することがひとつの目的である。また、やはりモジュラー表現や両側 Burnside 多元環の表現論を通じて、コホモロジーと fusion system の関係について調べることも主な目的である。

3. 研究の方法

Burnside 多元環のコホモロジーへの作用を調べ、両側関手の理論を応用することにより研究を行った。有限群の両側 Burnside 環は、部分群間の準同型写像や、外部自己同型群の情報を含み、群の構造と密接な関わりを持つ多元環である。圏論的な立場からは、この多元環は両側関手圏の各対象の自己準同型環となり、両側 Burnside 環の表現論には両側関手の理論を用いることができる。この両側 Burnside 多元環は自然に分類空間やコホモロジーに作用する。本研究では両側 Burnside 多元環のコホモロジーへの作用の解析を通して、分類空間の安定分解とその因子のコホモロジーを調べてきた。

素数 p について、 p -完備化された分類空間の安定分解は、有限群の両側 Burnside 環における単位元の冪等元分解と対応し、これを通して有限群や多元環の表現論と結びついている。また有限群の p -局所構造は Sylow p -部分群上の fusion system を通して得られるが、有限群の fusion system は有限群の両側 Burnside 環の特別な元で特徴づけられることが知られており、これを通して群の p -局所構造は両側 Burnside 環の表現論と結びついている。これらの研究に際しては、有限群の既約加群の次元、部分群からの誘導や trace 写像、共役、などに関する具体的で詳細なデータが必要となるため有限群の既約表現の次元や相対射影性と共役類との関係に焦点をあてた研究も行った。

4. 研究成果

本研究の主な研究成果として、位数が素数 p の 3 乗で exponent が p である extra special p -群の分類空間の安定分解とコホモロジーに関する結果、階数が 2 である有限 p -群の分類空間の安定分解とコホモロジーに関する結果、有限群の表現の次元や相対射影性と共役類に関する結果、の 3 点をあげる。

(1) 位数が素数 p の 3 乗かつ exponent が p である extra special p -群。

この p -群を以下では E と記載する。この有限群は階数が 2 の p -群の代表例であり、多くの単純群の Sylow p -部分群になっている。また、そのコホモロジー環はたいへん複雑な構造を持ち、 E 上には所謂 exotic fusion system が 3 種類存在するなどとても興味深い対象となっている。前年までの研究においても、分類空間の安定分解における重複度や、コホモロジーの分解について研究が行われており、特にコホモロジー環の冪零イデアルによる剰余環の分解について結果が得られていた。本研究では冪零部分も含めて分解の状況を決定した。また、 E を Sylow p -部分群として含む多くの有限群 G に対して、そのコホモロジーの考察が以前より行われていたが、その先行研究では 3 次有限射影線形群と関わる部分が未解明となっていた。本研究においては、その部分を解明することができ、いくつかの新たな具体的な状況が明らかとなった。以下具体的な結果を述べる。

E の mod p コホモロジー環 $H(E, F)$ の既約組成因子。

F を p -元体とし、 E の F 係数コホモロジー環を $H(E, F)$ とする。また整係数コホモロジー環の mod p での自然な像における冪零イデアルを N とおき、 N による剰余環を $H(E)$ とする。 E の両側 Burnside 環 $A(E, E)$ は $H(E, F)$ 、 $H(E)$ 、 N に自然に作用しこれらは $A(E, E)$ 次数付き

$A(E, E)$ -加群となる。既約 $A(E, E)$ -加群の次元が E の分類空間の安定分解の既約因子の重複度を与え、 $H(E, F)$ での $A(E, E)$ -加群としての既約組成因子の重複度は分類空間の既約因子のコホモロジーを与える。本研究の主結果では、 $H(E, F)$ は次数付き $A(E, E)$ -加群として $H(E)$ 、 N 、そしてある自然に得られるイデアルの(次数シフトと)いくつかの直和と既約因子が一致することを示し、それらの既約組成因子も決定した。これらと $H(E)$ に関する情報とをあわせて、 $H(E, F)$ の既約組成因子が決定された。

3 次有限射影線形群に関わる安定分解。

これまで得られたコホモロジーに関する情報を用いて、安定分解に関する新たな情報を得た。まず E を Sylow p -群に持つ有限群で fusion system が 3 次特殊射影線形群と関連するものは全部で 6 通りに分類されるが、そのすべての場合について分類空間の安定分解の既約組成因子と重複度を決定した。また、散在型単純群に関する結果はこれまでも知られているが、一部解明されていなかった $p=7$ の部分に応用し、いくつかの散在型単純群や exotic fusion system に関する新たな現象を発見することができた。

(2) 階数が 2 の有限 p -群の分類空間の安定分解とコホモロジー。

素数 p が 5 以上とする。階数が 2 の有限 p -群は可換群、meta cyclic 群、そして 3 個の元で生成される 2 種類の系列に分類される。これらの群の分類空間の安定分解についてはすでに Dietz, Martino-Priddy 等により研究されているがそのコホモロジーの分解については結論がでていなかった。本研究ではそれぞれの場合にコホモロジーの分解の具体的な記述を与えた。また分類空間の安定分解についてこれらの群の相互関係について考察を行い、上記(1)で述べた extra special p -群 E に現れる因子を用いてすべて記述できるという現象を発見した。さらに、分類空間の Chow 環の考察を行い、ここで考察した有限 p -群に関して mod p での Chow 環と偶数次のコホモロジー環の関係を得た。

(3) 有限群の表現の次元や相対射影性と共役類。

上記の研究において、有限群の既約表現の次数や構造についての詳細な情報が必要となるが、モジュラー表現において既約加群の相対射影性、vertex、complexity 等と群の共役類との関係について研究を行った。特に、群多元環を p -ブロックに分解し、 p -ブロックに属する既約加群の vertex と p -ブロックの p -正則下位不足群間の包含関係に関する結果を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 飛田明彦	4. 巻 2086
2. 論文標題 Harada's conjecture on character degrees and class sizes --- symmetric and alternating groups - --	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 144-153
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Akihiko Hida and Nobuaki Yagita	4. 巻 30
2. 論文標題 The splitting of cohomology of p-groups with rank 2	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Forum Math.	6. 最初と最後の頁 191-212
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/forum-2016-0241	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 A. Hida, N. Yagita	4. 巻 451
2. 論文標題 Representations of the double Burnside algebra and cohomology of the extraspecial p-group II	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 461-493
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.12.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 A. Hida, M. Kiyota	4. 巻 2148
2. 論文標題 Character degree products and class length products of some finite groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 A. Hida, M. Kiyota	4. 巻 2134
2. 論文標題 Character degrees and class lengths in p-blocks of some finite groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A. Hida, N.Yagita	4. 巻 2061
2. 論文標題 Relations among splittings of cohomologies of p-groups with rank 2	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 20-31
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計7件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 飛田明彦
2. 発表標題 有限群の既約指標の次数の積と共役類の長さの積の関係について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 飛田明彦
2. 発表標題 Lower defect groups and vertices of simple modules
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 飛田明彦 清田正夫
2. 発表標題 Character degree products and class length products of some finite groups
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型) 「代数的組合せ論と関連する群と代数の研究」 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 飛田明彦 清田正夫
2. 発表標題 Character degrees and class lengths in p-blocks of some finite groups
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 「有限群のコホモロジー論とその周辺」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 飛田明彦
2. 発表標題 Harada's conjecture on character degrees and class sizes --- symmetric and alternating groups---
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 代数的組合せ論および有限群・頂点作用素代数とその表現の研究 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 飛田明彦
2. 発表標題 Biset functors and cohomology of finite groups
3. 学会等名 第61回代数シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 A.Hida, N.Yagita
2. 発表標題 Relations among splittings of cohomologies of p-groups with rank 2
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (公開型) 「有限群のコホモロジー論とその周辺」
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----