2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月 ２９ 日現在

機関番号：３２６８６
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５０５５
研究課題名（和文）量子群の幾何学的研究とその応用

研究課題名（英文）Gepmrtic study of quantum groups and its applications

研究代表者
斉藤　義久（SAITO, Yoshihisa）

立教大学・理学部・教授

研究者番号：２０２９４５２２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：近年，数理物理学，特に弦理論において，トロイダル代数(TLA)，および量子トロイダル代数(QTA)が重要な役割を果たすことが知られている．本研究では，これら代数系を楕円ルート系の理論を用いて，統一的に調べた．特に，これらの代数系が，楕円モジュラー群の作用を持つことを証明した．この作用は楕円ルート系への楕円モジュラー群の作用から自然に誘導されるものである．この楕円モジュラー群の作用は，今後のTLA，およびQTAの研究において重要な役割を果たすものと確信している．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究の対象となるTLA及びQTAは，近年弦理論を始めとして様々な分野で注目を浴びている代数系であるが，既存の手法が殆ど役に立たないとの理由から組織的な研究は殆ど行われて来なかった．本研究では楕円ルート系の理論を用いてこの代数系を調べ，楕円モジュラー群がTLA，QTAに作用することを示した．これは，既存のルート系の理論，リー代数，量子包絡代数には無かった全く新しい性質であり，今後の当該代数の研究に重要な役割を果たすことが期待される．

研究成果の概要（英文）：In resent study of mathematical physics (string theory, especially), it is known that toroidal Lie algebras (LTA), and quantum toroidal algebras (QTA) play important roles. In this reseach project, we investigate the structure of these algebras in uniform way, by using the theory of elliptic root systems. Especially, we prove that these algebras have an elliptic modular group action induced from one on elliptic root systems. We believe these properties are quite important in the future study of these algebras.

研究分野：代数学

キーワード：量子包絡代数

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究は，表題にもある通り『量子群の幾何学的な研究とその応用』を目指すものである．ここで言う幾何学の意味として，研究を開始した当初は Kac-Moody リー代数に付随して定まる箙多様体を想定していたが，実際に行なった研究は当初案とはいささか方向性が異なるものになった．これは，研究期間中に量子トロイダル代数(QTA)に関する想定していなかった成果が得られたために途中から QTA に軸足を移して研究を行なった，という理由による．QTA に関する研究は，当初の研究計画の中に『メインテーマが上手く行かなかった場合に取り組むテーマ』として最初から織り込み済みのものであり，当初の研究目的を逸脱したものとは考えていない．

QTA は量子群の一種で，近年理論物理学，特に素粒子論(弦理論)との関連から注目されている代数である．しかしながら，半単純リー代数や Kac-Moody リー代数の場合に用いられた既存の方法論が殆ど役に立たないため，これまで組織的な研究は殆ど行われていなかった．

２．研究の目的

本研究の目的は，将来 QTA の表現論を本格的に行うにあたり，その土台となる代数的・幾何学的な基礎付けを整備することにある．リー代数，あるいはその量子化である量子包絡代数（量子群）の研究において，ルート系の理論が本質的な役割を果たすことはよく知られている．QTA の場合，ルート系に相当するのが『楕円ルート系』である．これは，もともと特異点理論の研究に端を発し，1980 年代に齋藤恭司氏によって導入されたルート系の拡張概念である．

大雑把に言えば，楕円ルート系とは『長さが 0 のルート（null root）を２方向もつようなルート系』である．純粋数学，物理学との関連の双方でよく調べられているルート系であるアフィン・ルート系は，『null root の方向が１つしかないルート系』であり，その意味で楕円ルート系はアフィン・ルート系の自然な拡張概念であると言って良い．しかしながら，『null root の方向が１から２に増える』ことによって，問題の難しさは激変する．実際，ルート系に対して自然に定まる鏡映群(Weyl 群)は，アフィン・ルート系であれば Coxeter 群になるが，楕円ルート系では Coxeter 群ではない．また，null root の方向が２つあることによって，楕円ルート系には自然にモジュラー群の作用が定まる．この群作用によって，楕円ルート系の理論と，楕円曲線の理論や保型形式論との間に興味深い関係が生み出される．こうした現象は既存のルート系には無かったもので，楕円ルート系の大きな特色になっている．

QTA が楕円ルート系をそのルート系に持つ以上，上述の『楕円ルート系とモジュラー群の関係』が，何らかの形で QTA にも遺伝しているであろう，と考えるのは自然な問題意識と言えるだろう．本研究の目的はこの問題意識を具現化することにある．すなわち，QTA の構造論を楕円ルート系を中止に据えて構成し，同時にモジュラー群が楕円ルート系に自然に作用するという事実が，どのような形で QTA に反映されるのかを詳しく調べることにある．こうした研究は，いわば基礎工事に当たるものであり，研究としては地味であるが，将来の当該理論の発展のためには欠かせないものであると考えている．

３．研究の方法

リー代数や量子群の研究において，ルート系の理論が重要な役割を果たすことはよく知られている．本研究においては，それらの代替物として『楕円ルート系』を理論の中心に据え，TLA・QTA の構造を調べた．楕円ルート系は，もともと特異点理論に由来して導入された概念であり，幾何学とも関連が深い．より具体的には，以下のような方法をとる．

(1) QTA の有限個の生成元と基本関係式による記述：

雛形となるのは，アフィン・ルート系に付随する量子群（アフィン量子群（QAA））の場合である．よく知られているように，QAA は Chevalley 型表示と呼ばれる有限個の生成元と基本関係式による表示と，Drinfeld 型表示と呼ばれる無限個の生成元と基本関係式による表示を持つ．両者はそれぞれにメリット・デメリットがあり，どちらの方が優れているとは言えないが，特に代数の構造を詳しく調べる際には，前者の Chevalley 型表示を用いるのが普通である．ちなみに，QAA の場合，Chevalley 型表示と Drinfeld 型表示の同値性は，Drinfeld によって 1980 年代半ばに指摘されたが，その際に証明が発表されず，しばらくの間専門家の間でも大きな問題になっていた．最終的には 1993 年に Beck がこの問題を肯定的に解決する論文を発表することで決着を見たが，それなりに非自明な問題であることは注目に値する．

他方，QTA は QAA の Drindeld 型表示を拡張する形で定義される代数であり，QAA の場合の Chevalley 型表示に相当する有限個の生成元と基本関係式による表示は知られていなかった．上述のように，QAA を始めとする既存の量子群の理論では，代数の構造の解析には，有限個の生成元と基本関係式による表示（Chevalley 型表示）が用いられる．したがって，QTA においてこのような表示が構成できれば，理論上非常に有用であることが期待される．『QTA は楕円ルート系をルート系に持つ』という事実の反映として，楕円ルート系の理論に基づく形で，有限個の生成元と関係式による表示を構成することが最も望ましい．

(2) QTA へのモジュラー群の作用：

上にも述べたように，楕円ルート系の大きな特徴は『モジュラー群の作用を持つ』ことでる．この事実が QTA の構造にどのように反映されるか？を具体的に記述したい．また，この作用を用いて，QTA のルート分解の理論を確立することが可能であると考えている．

(3) 楕円 Artin 群について：

古典的な場合（Kac-Moody リー代数に付随する量子群の場合），Weyl 群のルート系への作用は，そのままでは量子群への作用には持ち上がらず，Artin 群（braid 群とも呼ばれる）の作用として拡張される．したがって，QTA の場合にも同様の現象が起こることが期待される．しかしながら，楕円ルート系の場合には対応する群（楕円 Artin 群）の理論が全く未整備の状態なので，まずはそこから議論を始める必要がある．古典的な場合を手本にするならば，この楕円 Artin 群は，ルート系に付随して定まるある種の空間の基本群として幾何学的に定義されるべきである．楕円ルート系の理論がもともと複素代数幾何学（特異点理論）に起源を持つものであることはすでに述べた通りであるが，候補となる空間（楕円正則起動空間と呼ばれる）は斎藤恭司氏による特異点の研究（原始形式の理論）の中に既に現れており，十分実行可能な問題であると考える．

４．研究成果

以下，得られた研究成果のうち，主なものを挙げる．

(1) について：

楕円ルート系に付随する『楕円図形』と呼ばれる有限有向グラフを用いて，QTA を有限個の生成元と関係式によって表示する方法を開発した．得られた成果は多分に技術的ではあるものの，今後の QTA の研究に有用であると考えている．

(2) について：

楕円モジュラー群の楕円ルート系への作用が，QTA への作用に拡張できることを証明した．この過程において，(1)で示した『QTA の有限個の生成元と関係式による表示』が本質的な役割を果たす．

(3) について：

まず，楕円 Artin 群の代数的な定義を与え，いくつかの基本的な性質を証明した．定義は楕円ルート系に付随して定まる有限有向グラフ（楕円図形）を用いてなされる．構成の仕方は通常の Weyl 群から Artin 群を作り出す方法と同じであると言って良いが，通常の場合の Weyl 群の場合と異なり，楕円 Weyl 群は Coxeter 群ではないため，群としての楕円 Artin 群の構造にはまだ未啓明な部分が多い．例えば，楕円 Artin 群の中心の構造については（予想はあるものの）研究期間内に決定することは出来なかった．この問題は今後の課題として引き続き考えていきたい．

楕円 Artin 群を楕円正則軌道空間の基本群として幾何学的に捉えることに成功した．同時に楕円モジュラー群の作用との関係を幾何学的な立場から調べ，各楕円ルート系に対して定まる有限群がモジュラー群の作用をコントロールしていることがわかった．こうした現象は，半単純リー代数や Kac-Moody リー代数を始めとする既存の理論には全く無かった新しい現象であり，今後の当該分野の研究の礎となり得る成果が得られたと考えている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 斉藤義久	４．巻 4
２．論文標題 Remarks on the Drinfeld realization of quantum affine algebras	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory	６．最初と最後の頁 139-146
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Yoshihisa Saito	４．巻 453
２．論文標題 Quantized coordinate rings, PBW-type bases and q-boson algebras	５．発行年 2016年
３．雑誌名 Journal of Algebra	６．最初と最後の頁 456-491
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2011.01.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Kenji Iohara and Yoshihisa Saito	４．巻 -
２．論文標題 Invariants of the Weyl group of type $A_{2l}^{(2)}$	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） -	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　7件／うち国際学会　7件）

１．発表者名 Yoshihisa Saito
２．発表標題 Artin groups associated to elliptic root systems
３．学会等名 Conference on Algebraic Representation Theory 2019, Department of Mathematics, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan.（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

1．発表者名
Yoshihisa Saito

2．発表標題
Elliptic Artin groups

3．学会等名
Arbeitsgruppe Algebra und Zahlentheorie Seminare, Mathematisches Institut, University of Cologue.（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Yoshihisa Saito

2．発表標題
Elliptic Artin groups

3．学会等名
Geometry and Integrable Systems, Institut de Matheamatiques de Bourgogne.（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Yoshihisa Saito

2．発表標題
Remarks on the Drinfeld realization of quantum affine algebras

3．学会等名
Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2018

4．発表年
2018年

1．発表者名
Yoshihisa Saito

2．発表標題
On quantum toroidal algebras associated with arbitrary root systems

3．学会等名
Arbeitsgruppe Algebra und Zahlentheorie Seminare, Mathematisches Institut, University of Cologue.（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2018年

1．発表者名 Yoshihisa Saito
2．発表標題 On quantum toroidal algebras associated with arbitrary semisimple Lie algebras
3．学会等名 Infinite Analysis 2017（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 Yoshihisa Saito
2．発表標題 On quantum elliptic Algebras
3．学会等名 Geometric representation theory（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

1．発表者名 Yoshihisa Saito
2．発表標題 Quantum groups, quivers and related geometry
3．学会等名 Berkeley-Tokyo Autumn School --- Quantum Field Theory and Subfactors ---（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
連携研究者	伊山　修 (IYAMA Osamu) (70347532)	名古屋大学・多元数理学研究科・教授 (13901)	

６．研究組織（つづき）

	氏名 （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
連携研究者	筧　三郎 (KAKEI Saburo) (60318798)	立教大学・理学部・教授 (32686)	
連携研究者	谷崎　俊之 (TANISAKI Tshiyuki) (70142916)	大阪市立大学・理学部・名誉教授 (24402)	