

令和 4 年 6 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05057

研究課題名(和文)Combinatorics around Painleve VI

研究課題名(英文)Combinatorics around Painleve VI

研究代表者

Kirillov Anatoli (Kirillov, Anatoli)

京都大学・数理解析研究所・研究員

研究者番号：20314057

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：Proof of old standing Conjecture that the all coefficients of the two parameter Umemura polynomials are integer numbers and gave their explicit formulas (partly joint with M.Taneda and P. van Diejen). Some quantum and elliptic generalizations are suggested.

研究成果の学術的意義や社会的意義

Our results explained and proved Conjecture that coefficients of Umemura polynomials are integers, and pointed out on surprising connections of Painleve and Poschl-Teller models and Combinatorics and Representation Theory.

研究成果の概要(英文)：Proof of old standing Conjecture that the all coefficients of the two parameter Umemura polynomials are integer numbers and gave their explicit formulas (partly joint with M.Taneda and P. van Diejen). Some quantum and elliptic generalizations are suggested.

研究分野：Integrabl Systems, Combinatorics

キーワード：Painleve Poschl-Teller models Umemura polynomials Combinatorics

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) (Overview)

Six Painleve equations had been discovered and studied by Paul Painleve, now more than 100 years ago. Since his fundamental Third Memuar (1922), these equations have been extensively investigated by wide variety of Mathematicians around the World and, have been found numerous applications in Mathematics and Physics. The most general among Painleve equations is the Painleve VI (P-VI for short). This equation depends on 4 parameters, and appeared to have many deep, surprising and unexpected properties, which have been discovered later by many Scientists. For a general set of 4 parameters mentioned above, solutions to P-VI are highly transcendental functions which are still need to be further investigated. For special values of parameters, which depend on two non-negative integers n and m , it was discovered, by K.Okamoto and H. Umemura among many others, that P-VI has two parameter families of algebraic solutions, which satisfy rather complicated recurrence relations. These recurrence relations allow computing recursively all that algebraic solutions in explicit form (up to degree 6). Since the recurrence relations for algebraic solutions to P-VI are very complicated and sophisticated, the observation that 2-parameter family of polynomials associated with those algebraic solutions (the so-called Umemura polynomials) have integer coefficients was very mysterious and surprising and very attractive for many Mathematicians.

The main objective of our Project was to explain and clarify that integer coefficients phenomenon of P-VI, and give its combinatorial interpretation(s).

(2) (Background.)

I have written and published several papers concerning interrelations between various branches of Mathematics and Mathematical Physics including Algebra (Fomin-Kirillov algebras,...), Representation Theory (Quantum groups, Yangians, q -weight multiplicities, Kirillov-Reshetikhin modules,...), Integrable Systems (Heisenberg, Calogero-Moser, Sine-Gordon, Macdonald-Ruijsennar, Poschl-Teller models, ...), Special Functions (Dilogarithm Identities, q -Clebsch-Gordon coefficients (aka Askey-Wilson polynomials),...), Combinatorics (Fermionic formulas for parabolic Kostka polynomials (aka Rigged Configuration Bijection (Kirillov)), Tropical Combinatorial Bethe Ansatz, ...Robinson-Schensted-Knuth Correspondence (Berenstein-Kirillov birational map), ...), Low Dimensional Topology (R -matrices knot invariants,...), Algebraic Geometry (Schubert, Grothendieck, Hessenberg Calculi,...), Probability (Berenstein-Kirillov birational maps and probabilistic model of KPZ type,...),... . I also was familiar with basic definitions and results of Painleve equations theory.

2. 研究の目的

Purpose of research

In fundamental papers by K.Okamoto and that by H. Umemura certain polynomials associated with algebraic solutions to Painleve V and VI have been introduced and studied. Their definition was given as solutions to rather complicated and sophisticated recurrence relations between these polynomials. These recurrences relations allow computing these polynomials (now called by Umemura polynomials) for some cases. It was observed that in all cases which had been computed, Umemura polynomials have an integer coefficient. This integer coefficient phenomenon for coefficient of Umemura polynomials is rather mysterious, since the tier definition involves very complicated recurrence relations. To enplane that integer phenomenon of Umemura polynomials coefficient was the main motivation for me to study Umemura polynomials. Yet another motivation for me was my observation that it was very surprising and mysterious, the list of Umemura polynomials coefficients coincides with that for certain polynomials associated with solutions to Poschl-Teller model.

3. 研究の方法

Research method

My approach was based on my joint papers with Ph. van Diejen concerning explicit formulas for (algebraic) solutions to the Poschl-Teller famous equations (aka spherical functions for some homogeneous spaces). My key observation was that the numbers which appeared in the Umemura polynomials and that in the study Poschl-Teller models are the same! This observation looks rather mysterious, since it is still there are no conceptual explanations of a connection between P-VI and Poschl-Teller models. Note that for one parameter Umemura polynomials a combinatorial formula for its coefficient was suggested by S. Okada and has been proved by M. Taneda and S.Okada-K. Okamoto, H.Umemura and M. Noumi. However, in general, a combinatorial interpretation of coefficients for two parameters Umemura polynomials is still missed, except for some important special coefficients, which is one of the main results in the body of the Project.

Our proofs are based on checking fundamental recurrence relations for two parameters Umemura polynomials discovered by K. Okamoto and H. Umemura, for certain (given explicitly by A.N. Kirillov and Ph. van Diejen) modification of polynomials coming from the study of solutions to the Poschl-Teller models. To check the fundamental recurrence relations among two parameters Umeura polynomials for our modified solutions to Poschl-Teller model(s), first of all, we provide an explicit determinantal formula for our modified polynomials, of secondly, to prove certain new recurrence relations between determinantal formulas in questions. This is rather technical and involved part of our proof of mail result on the Project. For poofs some identities we need, we have used several classical results from the theory of symmetric functions and hypergeometric series. It remains to be observed that for small values of parameters both polynomials in question are the same.

Part of the results obtained in the body of our Project has been presented at international workshops in Matsumoto, Okayama, Osaka, Tokyo, and Kyoto.

4. 研究成果

Result

The key idea to prove the integer coefficient phenomenon for two parameters Umemura polynomials was based on the use of recurrence relations and of some determinantal formulas for solutions to Poschl-Teller model, and show that the former after some modification (a rather technical part) also satisfy the same recurrence relations as for P-VI. It gives explicit formulas for two-parameter Umemura polynomials. Note that the numbers we obtained for the coefficients mentioned, look far from being integer one, but I and Ph. van Diejen proved that they are really integers in our paper concerning Poschl model. My result (collaboration with M. Taneda) that the coefficients for two parameters Umemura polynomials for Painleve VI and that for polynomials associated with certain algebraic solutions to Poschl-Teller model are in one-to-one correspondence, gives a simple product formula for the coefficients o the two parameters Umemura polynomials. This result is a generalization of a formula for one parameter Umemura polynomials coefficients suggested by S.Okada and has been proved a bit earlier by M.Taneda, and S.Okada-K.Okamoto-H.-Umemura-M.Noumi.

Since our product formulas for the two parameters Umemura polynomials coefficients admit natural polynomial q -analogs, we are planning to extend our results to quantum and discrete versions of the celebrated Painleve VI equation.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計32件（うち査読付論文 27件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 17件）

1. 著者名 Kirillov Anatol N.	4. 巻 340
2. 論文標題 Rigged Configurations and Unimodality	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Representation theory, mathematical physics, and integrable systems, Progr. Math.	6. 最初と最後の頁 453 ~ 496
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-78148-4_16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Naruse Hiroshi, Okada Soichi	4. 巻 2-4
2. 論文標題 Skew hook formula for d-complete posets via equivariant K-theory	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 541 ~ 571
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.54	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hudson Thomas, Ikeda Takeshi, Matsumura Tomoo, Naruse Hiroshi	4. 巻 546
2. 論文標題 Double Grothendieck polynomials for Symplectic and Odd Orthogonal Grassmannians	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 294 ~ 314
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2019.11.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ito Masahiko, Noumi Masatoshi	4. 巻 60
2. 論文標題 A determinant formula associated with the elliptic hypergeometric integrals of type BCn	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 071705 ~ 071705
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5094116	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kaji Shizuo, Maeno Toshiaki, Nuida Koji, Numata Yasuhide	4. 巻 13
2. 論文標題 Polynomial expressions of p-ary auction functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Cryptology	6. 最初と最後の頁 69 ~ 80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/jmc-2018-0016	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Noumi, Masatoshi	4. 巻 76
2. 論文標題 Remarks on σ -functions for the difference Painleve equations of type E 8	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 1--65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito, Masahiko; Noumi, Masatoshi	4. 巻 14
2. 論文標題 Connection formula for the Jackson integral of type A_n and elliptic Lagrange interpolation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.	6. 最初と最後の頁 No. 077, 42 pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shizuo Kaji, Toshiaki Maeno, Koji Nuida and Yasuhide Numata	4. 巻 13-2
2. 論文標題 Polynomial expressions of p-ary auction functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Cryptology	6. 最初と最後の頁 69-80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/jmc-2018-0016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Takuro Abe, Toshiaki Maeno, Satoshi Murai and Yasuhide Numata	4. 巻 71-4
2. 論文標題 Solomon-Terao algebra of hyperplane arrangements	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1027-1047
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/79957995	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 A.N.Kirillov	4. 巻 76
2. 論文標題 Rigged configurations and Catalan, stretched parabolic Kostka numbers and polynomials: polynomiality, unimodality and log-concavity.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 303-346
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/07610303	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naruse Hiroshi	4. 巻 516
2. 論文標題 Elementary proof and application of the generating functions for generalized Hall-Littlewood functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 197 ~ 209
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.09.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakagawa Masaki, Naruse Hiroshi	4. 巻 708
2. 論文標題 Universal Gysin formulas for the universal Hall-Littlewood functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 201 ~ 244
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/conm/708/14267	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 成瀬 弘	4. 巻 2103
2. 論文標題 ユニタリ鏡映群の同変シューベルト・カルキュラスに向けて	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 137-146
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A.N. Kirillov and Gleb Nenashev	4. 巻 78B
2. 論文標題 On Q-deformations of Postnikov-Shapiro algebras	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Seminar Lotharingien de Combinatoire	6. 最初と最後の頁 n.55, 12pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Hudson, T. Ikeda, T. Matsumura and H. Naruse	4. 巻 320
2. 論文標題 Degeneracy Loci Classes in K-theory - Determinantal and Pfaffian Formula -	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 115-156
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ito Masahiko, Noumi Masatoshi	4. 巻 145
2. 論文標題 Evaluation of the BC _n elliptic Selberg integral via the fundamental invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 689 ~ 703
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/13234	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ito Masahiko, Noumi Masatoshi	4. 巻 45
2. 論文標題 Derivation of a BC _n B C n Elliptic Summation Formula via the Fundamental Invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Constructive Approximation	6. 最初と最後の頁 33 ~ 46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00365-016-9340-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kajiwara Kenji, Noumi Masatoshi, Yamada Yasuhiko	4. 巻 50
2. 論文標題 Geometric aspects of Painlevé equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 073001 ~ 073001
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/50/7/073001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Ikeda, Shinsuke Iwao and Toshiaki Maeno	4. 巻 2020-19
2. 論文標題 Peterson isomorphism in K-theory and relativistic Toda lattice	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Int. Math. Res. Notices	6. 最初と最後の頁 6421--6462
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/IMRN/RNY051	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R.Sakamoto and A.N.Kirillov	4. 巻 905
2. 論文標題 Bethe's Quantum Numbers And Rigged Configurations	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Nuclear Physics B	6. 最初と最後の頁 359--372
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nuclphysb.2016.02.020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A.N. Kirillov and H. Naruse	4. 巻 39
2. 論文標題 Construction of double Grothendieck polynomials of classical types using Id-Coxeter algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 695--728
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3836/tjm/1491465733	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A.N. Kirillov	4. 巻 12
2. 論文標題 On some quadratic algebras $1+1/2$: Combinatorics of Dunkl and Gaudin elements, Schubert, Grothendieck, Fuss-Catalan, universal Tutte and Reduced polynomials	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 SIGMA	6. 最初と最後の頁 002, 172 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 A.N. Kirillov	4. 巻 12
2. 論文標題 Notes on Schubert, Grothendieck and Key polynomials	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 SIGMA	6. 最初と最後の頁 037, 56 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 M.Ito and M.Noumi	4. 巻 229
2. 論文標題 A generalization of the Sears--Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type BC_n	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Adv. in Math.	6. 最初と最後の頁 361--380
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2016.05.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 K.Mimachi and M.Noumi	4. 巻 70
2. 論文標題 Solutions in terms of integrals of multivalued functions for the classical hypergeometric equations and the hypergeometric system on the configuration space	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Kyushu J. Math	6. 最初と最後の頁 315--342
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.70.315	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Y.Komori, Y.Masuda and M.Noumi	4. 巻 44
2. 論文標題 Duality transformation formulas for multiple elliptic hypergeometric series of type BC	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Constr. Approx	6. 最初と最後の頁 483--516
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00365-015-9316-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 M.Ito and M.Noumi	4. 巻 145
2. 論文標題 Evaluation of the BC _n elliptic Selberg integral via the fundamental invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 689--703
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/13234	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 M.Ito and M.Noumi	4. 巻 45
2. 論文標題 Derivation of a BC _n elliptic summation formula via the fundamental invariants	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Constr. Approx.	6. 最初と最後の頁 33--46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00365-016-9340-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 K.Kajiwara, M.Noumi and Y.Yamada	4. 巻 50
2. 論文標題 Geometric aspects of Painleve equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Phys. A: Math. Theor.	6. 最初と最後の頁 073001 (164pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/50/7/073001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kenji Kajiwara, Masatoshi Noumi, Yasuhiko Yamada	4. 巻 50-7
2. 論文標題 Geometric aspects of Painleve equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 73001
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/50/7/073001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 T.Ikeda, L.Mihalcea and H.Naruse	4. 巻 53
2. 論文標題 Factorial P- and Q-Schur functions represent equivariant quantum Schubert classes	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Osaka J. of Mathematics	6. 最初と最後の頁 591--619
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Toshiaki Maeno and Yasuhide Numata	4. 巻 8
2. 論文標題 Sperner property and finite-dimensional Gorenstein algebras associated to matroids	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 549-570
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1216/JCA-2016-8-4-549	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計34件（うち招待講演 24件 / うち国際学会 25件）

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Rigged Configurations, past and present, I
3. 学会等名 International Workshop P-positivity in Matroid Theory and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Rigged Configurations, past and present, II
3. 学会等名 International Workshop P-positivity in Matroid Theory and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 FK algebras and posutuvuty
3. 学会等名 International Workshop P-positivity in Matroid Theory and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Anatol N. Kirillov
2. 発表標題 Log-concavity of graph chromatic polynomials.
3. 学会等名 Matroids and Tutte polynomials. (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Anatol N. Kirillov
2. 発表標題 Generalized RSK correspondence
3. 学会等名 Toric Topology 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H.Naruse
2. 発表標題 Generalized colored hook formula
3. 学会等名 New interactions between Geometry and Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M. Noumi
2. 発表標題 Formal eigenfunctions for the elliptic Ruijsenaars difference operators
3. 学会等名 Elliptic integrable systems, special functions and quantum field theory (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M. Noumi
2. 発表標題 Darboux and Moutard transformations -- What I learned from Jon
3. 学会等名 Integrable systems, special functions and combinatorics (ISLAND V) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M. Noumi
2. 発表標題 Elliptic hypergeometric integrals
3. 学会等名 Representation Theory, Probability, and Symmetric Functions (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 M. Noumi
2. 発表標題 Elliptic hypergeometric functions and elliptic difference Painleve equation
3. 学会等名 XIX International Congress on Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 M. Noumi
2. 発表標題 Elliptic hypergeometric integrals
3. 学会等名 Summer Research Institute on q-Series (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 M. Noumi
2. 発表標題 Elliptic hypergeometric integrals and associated determinant formulas
3. 学会等名 13th International Conference on Symmetry and Integrability of Difference Equations (SIDE 13) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toshiaki Maeno
2. 発表標題 The Lefschetz property for Artinian Gorenstein algebras
3. 学会等名 Algebraic Geometry in Positive Characteristic and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 On generalized cohomology theories of nilpotent Hessenberg varieties
3. 学会等名 Meeting on Hessenberg varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Naruse
2. 発表標題 Some combinatorial properties of dual factorial Schur functions
3. 学会等名 Workshop on Algebraic and Enumerative Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Naruse
2. 発表標題 Hook formula and equivariant K-theory
3. 学会等名 Crystals and Their Generalizations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 成瀬 弘、岡田 聡一
2. 発表標題 逆平面分割の母関数と同変K-理論
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Dilogarithm Identities
3. 学会等名 Special Lecture at National Research University High Economy School, Moscow, Russia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Bethe Ansatz and Combinatorics
3. 学会等名 Colloquium Talk at National Research University High Economy School, Moscow, Russia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Quadratic algebras, Integral Systems and Combinatorics
3. 学会等名 Special Lecture at National Research University High Economy School, Moscow, Russia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Quadratic algebras and universal Dunkl operators.
3. 学会等名 Seminar talk at Kavli Institute of Physics and Mathematics Of the Universe (IPMU) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Naruse
2. 発表標題 Equivariant K-theory and hook formula for skew shape on d-complete set
3. 学会等名 Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 M. Noumi
2. 発表標題 Elliptic difference Painlevé equation and elliptic hypergeometric integrals
3. 学会等名 XXVth International Conference on Integrable (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Flat connections for q-KZ equations associated with affine Birman--Murakami--Wenzl algebras
3. 学会等名 Classical and quantum integrable systems and supersymmetry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 On some quadratic algebras
3. 学会等名 Lecture course "On some quadratic algebras" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Robinson-Schensted-Knuth correspondence and Rigged Configurations
3. 学会等名 Lecture course "Robinson-Schensted-Knuth correspondence and Rigged Configurations" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Bethe subalgebras in affine Birman--Murakami--Wenzl algebras
3. 学会等名 MS Seminar at Kavli IPMU (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 On braided Hopf lgebras
3. 学会等名 Hopf algebras and Tensor Categories (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 A.N.Kirillov
2. 発表標題 Cactus group and Gelfund-Tsetlin group
3. 学会等名 Spring School on Representation Theory
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 M.Noum
2. 発表標題 Elliptic hypergeometric integrals and elliptic interpolation functions
3. 学会等名 BIRS workshop: "'Painleve Equations and Discrete Dynamics'" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 M.Noum
2. 発表標題 Discrete Painleve equations and special functions
3. 学会等名 ESI workshop: "'Elliptic Hypergeometric Functions in Combinatorics, Integrable Systems and Physics'" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野海正俊
2. 発表標題 Macdonald 多項式 -- アフィン Hecke 環からのアプローチ
3. 学会等名 超幾何学校 2016 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 野海正俊
2. 発表標題 楕円超幾何積分と楕円補間函数
3. 学会等名 RIMS 研究集会「可積分系数理の現状と展望」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 伊藤雅彦・野海正俊
2. 発表標題 Gustafson-Rkha 和公式の楕円化
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 野海正俊・梅田亨・若山正人	4. 発行年 2016年
2. 出版社 日本評論社	5. 総ページ数 iii+133
3. 書名 多変数超幾何函数 -- ゲルファント講義 1989	

1. 著者名 坂本玲峰, アナトール N. キリロフ	4. 発行年 2021年
2. 出版社 森北出版	5. 総ページ数 320
3. 書名 ベータ仮設の数理	

〔産業財産権〕

〔その他〕

International Workshop P-positivity in Matroid Theory and Related Topics
<https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kirillov/workshop2021.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	坂本 玲峰 (Sakamoto Reiho)		
連携研究者	野海 正俊 (Noumi Masatoshi) (80164672)	神戸大学・理学(系)研究科(研究院)・教授 (14501)	
連携研究者	成瀬 弘 (Naruse Hiroshi) (20172596)	山梨大学・大学院教育学研究科・教授 (13501)	
連携研究者	前野 俊昭 (Maeno Toshiaki) (60291423)	名城大学・理工学部・教授 (33919)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 International Workshop P-positivity in Matroid Theory and Related Topics	開催年 2021年～2021年
--	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of Oregon	UCB, Berkeley		
英国	Warwick University			
Russia	National Research University HES			
Russia	JINR			
USA	Indiana University			
the Republic of Korea	KIAS			