

令和 3 年 5 月 17 日現在

機関番号：14701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05060

研究課題名(和文) 行列と超幾何級数に関連した代数的組合せ論とその周辺

研究課題名(英文) Research on algebraic combinatorics related to matrices and hypergeometric series and surrounding topics

研究代表者

田川 裕之 (Tagawa, Hiroyuki)

和歌山大学・教育学部・教授

研究者番号：80283943

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究で得られた成果は主として次である。穴が連続して空いた Aztec rectangle の domino tiling の母関数を、超幾何級数を成分とする行列式で表した。高さを制限した Schroder path, Delannoy path の個数が超幾何級数の和で表せることを証明した。cylindric skew diagram の hook formula に関する豊澤予想の一部を肯定的に証明した。拡張されたナラヤナ多項式の合成積、拡張されたフィボナッチ数のべき乗和、拡張されたハノイの塔等に関する解析を通じて、多数の超幾何級数の等式、隣接関係式、和公式、積公式等を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

連続して穴の開いた Aztec rectangle の母関数、及び高さを制限した Schroder path, Delannoy path の個数に関して得られた結果は、他の tiling 問題への拡張が見込める。また、本研究課題で得られた多数の超幾何級数の等式、隣接関係式、和公式、積公式等については、直交多項式や表現論などの他分野への応用、類似した等式の発見、 q 超幾何級数への拡張等が期待できる。さらに、cylindric skew diagram の hook formula に関する結果は、豊澤予想の解決に寄与するものと考えられる。

研究成果の概要(英文)：In this research, we mainly obtained the following results: We expressed the generating function of the domino tilings in the Aztec rectangle with connected holes by a determinant of the matrix whose elements are hypergeometric series. We proved that the number of the Schroder paths which restricted the height was expressed by a summation of some hypergeometric series. We obtained almost same results on the Delannoy paths. We proved positively a part of Toyosawa conjecture on the hook formula of cylindric skew diagrams. We got many equalities, contiguous relations, summation formulas, product formulas and so on for hypergeometric series through an analysis of extended Narayana polynomials, extended Catalan numbers, extended Fibonacci numbers, extended towers of Hanoi and so on.

研究分野：代数的組み合わせ論

キーワード：行列 超幾何級数 Aztec rectangle hook length formula

様式 C - 19, F - 19 - 1, Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究課題で主として扱った数学的对象についての研究開始当初の背景について順に述べる。Aztec diamond, Aztec rectangle: 1×1 のタイルで敷き詰められた図形を domino (2×1 のタイル) で敷き詰めることは, domino tiling と呼ばれている。与えられた図形の domino tiling の個数や各 domino に何らかの重みをつけた母関数を求めることは, 最も基本的な domino tiling の問題である。例えば, $m \times n$ の長方形の domino tiling の個数を表す公式は, 1961 年に Kasteleyn etc. により発見されている。1992 年に Elkies etc. によって導入された Aztec diamond は, domino tiling に頻出する図形の一つである。Aztec diamond は, $2n(n+1)$ 個の 1×1 のタイルで敷き詰められた周囲が階段状の正方形 (=AD(n) とおく) であり, AD(n) の domino tiling の総数が $2^{n(n+1)/2}$ となる公式, 及び, 縦 domino の個数等に重みを付けた母関数の公式についても, Elkies etc. により証明されている。また, 2002 年に Johansson は, AD(n) の domino tiling と Schroder path の非交叉路の関係を明確にし, lattice path method を用いて AD(n) の tiling の総数を行列式で表し, 上述の結果の別証明を与えた。さらに, 2014 年に, 京都大学の上岡修平氏は, Laurent 双直交多項式を用いて, AD(n) の tiling の総数を表す Johansson の行列式の計算を行うことで, Aztec diamond の tiling 問題についての新しいアプローチに成功した。本研究代表者は, 琉球大学(現岡山大学)の石川雅雄氏, 学習院大学(現東北大学)の中野史彦氏, 津田塾大学の貞廣泰造氏と, 穴のあいた長方形型の Aztec rectangle の domino tiling についての共同研究を行い, 上岡氏の手法を拡張する形で tiling の総数を行列式で表し, その行列式が, (2,1) 型の超幾何級数を成分とする次数の低い行列の行列式で表せることを予想し, 特別な場合に証明した。

矩形行列式, Hankel 型行列式: 矩形行列式は, 20 世紀初頭に, $n \times k$ 行列 (n, k の縦長の行列) に対して Cullis により導入された行列式であり, $n!/(k!(n-k)!)$ 個の k 次正方行列の和として表され, 通常の方行列の行列式の拡張となっている。本研究代表者は, ゼミ指導学生と共同研究を行い, 矩形行列式を用いた lattice path method を考案し, 左右対称な Aztec diamond の個数を矩形行列式を用いて表示した。さらに, 矩形行列式を pfaffian を用いて表し, 矩形行列式に対する Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を証明した。また, (i, j) 成分が a_{i+j+r} の形で表せる行列の行列式は Hankel 型行列式と呼ばれ, 超幾何級数, 連分数展開, 直交多項式等の様々な分野と密接に関連している。2013 年, 本研究代表者は, 石川氏とリヨン大学の Jiang Zeng 氏と共同研究を行い, カタラン数の q -analogue を成分に持つ Hankel 型行列の pfaffian 版を積の形で記述した。さらに, 2015 年に, 華東師範大学の Victor J.W.Guo 氏を加え, q -超幾何級数の二乗公式を証明することで, Wilson の Gram 行列式に関連した行列式を Askey-Wilson 多項式を用いて表示することに成功した。

leaf poset: 厳密に図を用いて定義された hook length poset として, 現在知られている最も大きなものが 石川氏と本研究代表者によって導入された leaf poset である。順序集合 (poset) P に対するある種の母関数が q -整数の積の形で表せるとき, P は hook length poset と呼ばれている。例えば, 分割 に対して定義される shape と呼ばれる順序集合 $S(\lambda)$ は, よく知られた hook length poset の一つであり, $S(\lambda)$ は組合せ論と表現論において大変重要なものである。実際, $S(\lambda)$ を n の分割とすると, $S(\lambda)$ に対する母関数の変数を 1 に置き換えた等式は, 分割 に対する標準盤の個数を表し, n 次対称群の S_n に対する既約表現の次元を表す公式となることが知られている。他にも, tree, shape, shifted shape は hook length poset としてよく知られた poset であるが, 「どのような順序集合が hook length poset であるのか」という疑問に対する明確な回答は未だ得られていない。この疑問に答えようとする試みの一つとして, R.A.Proctor は d -complete poset を導入し, 全ての d -complete poset は hook length poset であることを証明した。hook length poset P に対する母関数は一変数であるが, さらに重みを付けた多変数の母関数についても同様の公式が成り立つとき, P は multivariable hook length poset と呼ばれ, Proctor と岡山大学の仲田研登氏は, d -complete poset が multivariable hook length poset であることを証明した。hook length poset のより広いクラスを得るために, 石川氏と本研究代表者は, d -complete poset を拡張した leaf poset という 6 系列の順序集合を導入し, それらは全て multivariable hook length poset であることを, Schur function の関連した 6 種類の無限和の等式を経由して証明し, 既知の multivariable hook length poset を利用した新しい multivariable hook length poset の作成方法も多数発見した。

2. 研究の目的

行列に対して定義される数学的にも物理学的にも重要な値として行列式, pfaffian というものがよく知られている。行列式は行列の正則性の判定に用いられ, pfaffian は歪対称行列に対して定義され, 歪対称行列の行列式が pfaffian の 2 乗となっている。数え上げ問題の有効な手段の一つとして lattice path method と呼ばれるものがある。数えるべき (重みつき) の対象を非交叉路に言い換えて, 行列式や pfaffian 等で表すという方法である。例えば, カタラン数を成分とする Hankel 型行列式が 1 であることは, lattice path method を用いて容易に示すことができる。また, Cauchy 型の行列式や, Schur の pfaffian に代表されるように, 行列式や pfaffian を積の形で表すことは, 他分野への応用の可能性も高くなり, とても有益である。成分が少し複雑になるだけで, そのような美しい結果を得ることは一般に容易ではなくなるが,

何らかの性質がよければ、超幾何級数、 q -超幾何級数等を用いて表すことが可能となる場合がある。もし行列式や pfaffian が超幾何級数を用いて表せる場合には、その行列式や pfaffian の解析が、超幾何級数の解析に直結し、新しい等式や性質の発見につながるが大いに期待できる。

以上のことから、本研究課題では、行列と超幾何級数に関連した3項目「Aztec rectangle の数え上げ問題の拡張と解明、及び超幾何級数を成分に持つ行列式の解析」、「矩形行列式、Hankel 型行列式、Hankel 型 pfaffian に関する等式の拡張と応用」、「leaf poset の組合せ論的特徴付けと拡張及び一般化」について代数的組合せ論の観点から、広く横断的な研究を行うことを目的とした研究を行った。

3. 研究の方法

本研究課題で取り扱う数学的対象は、すべて離散的であるといってもよい。したがって、数式処理プログラミング等を利用して具体例を求めることが可能となる場合が多い。そのため、本研究課題では、小さな具体例を手計算で求めることで、計算のアルゴリズムを解析し、数式処理プログラミングを利用して、さらに先の具体例を求め、得られた具体例を分析、解読することで予想を作成し、再度数式処理プログラミングを利用して予想の正当性の確認を得た上で実際に証明を行うといった方法で研究を行った。特に、超幾何級数に関連した等式の証明、隣接関係式の発掘、cylindric skew diagram の hook formula に関する豊澤予想の解析においては、数式処理プログラミングが威力を發揮した。

さらに、同じ興味を持つ数学者との議論、討論及び周辺分野の情報収集は、本研究課題を効果的かつ効率よく進めるためだけでなく、研究の飛躍的發展にもつながると考え、対面での研究打ち合わせや、関連する周辺分野の研究集会や学会への参加を積極的に行った。

4. 研究成果

本研究課題では、主として次の研究成果を得ることができた。

- (1) 穴が連続して偶数個並んだ Aztec rectangle の domino tiling の数え上げ問題について、石川氏、中野氏、貞廣氏と共同研究を行い、その総数が $(2,1)$ 型の超幾何級数を成分とする行列式を用いて表せることを、Schroder path を拡張して超幾何級数で表し、domino tiling を拡張した Schroder path で置き換え、lattice path method, LU 分解の拡張等を利用して証明した。さらに、上記の結果を拡張する形で、縦 domino に weight z をつけた母関数が「 z 変数の $(2,1)$ 型超幾何級数を成分とする行列式」で表されることを証明した。また、系として、 q -超幾何級数に関連した等式が多数得られた。
- (2) 石川氏と共同で、穴の空いた Aztec rectangle の domino tiling で 180 度回転不変な数え上げ問題に着手し、穴が連続して空いている場合、穴が少数個で連続していない場合等についての多数の予想式を得た。さらに、90 度回転不変な穴の開いた Aztec diamond の domino tiling についても共同研究を行い、カステリンの方法を用いた数式処理による実験結果を分析することで、複数個の穴が規則的に空いている場合の domino tiling の個数に関する予想式を発見した。また、ランク n の Aztec diamond に対応する「互いに交差しない n 個の Schroder path の組」の集合に順序を導入し、lattice path method を用いて Hankel 型行列式を調べることで、順序集合としての rank generating function も求めた。
- (3) 高さを r までに制限した $(0,0)$ から $(2n+m,m)$ への拡張された Schroder path の個数が、ある条件を満たす場合には、 $(2,1)$ 型の超幾何級数の和として表せることを証明し、系として、高さを制限した Dyck path の個数を表す等式を得た。また、Delannoy path についてもほぼ同様の等式を証明した。さらに、Dyck path の一部に重みを付けたカタラン数の z -analogue を行い、Hankel 型行列式が $(2,1)$ 型の超幾何級数を用いて記載できることを証明し、系としてカタラン数の Hankel 型行列式を一般に記載する有名な等式の別表示と別証明、及び $(4,3)$ 型の超幾何級数に関する隣接関係式等が得られた。
- (4) leaf poset のパーツとして同一の strict partition に対して、ある条件を満たす変形を共通に行っても multivariable hook length poset になることを示した。また、石川氏、豊澤氏と cylindric skew diagram の hook formula についての共同研究を行い、ファンデルモンドの行列式に関連した和の等式等を利用することで、 $(n,1^m)$ 型の分割に対する豊澤氏の予想を肯定的に証明した。また、系として、 $(5,3)$ 型の q -超幾何級数、及び $(4,2)$ 型の超幾何級数の等式が得られた。
- (5) ハノイの塔においてプレートの持ち上げる高さに制限を加えた数え上げ問題は「カエルのハノイの塔」として知られている。この問題についての共同研究を行い、一般項が $(3,2)$ 型の超幾何級数で表せることを証明し、系として $(3,2)$ 型の超幾何級数の 3 項間関係式を得

た (cf. [TE1])。また、フィボナッチ数のべき乗和の等式のリュカ数を用いた一般化及び z -analogue についての共同研究を行うことで、 z -analogue されたフィボナッチ数のべき乗和の公式を発見した。さらに、証明に利用した $(2,1)$ 型の超幾何級数に関連した等式を分析することで、 $(4,3)$ 型の超幾何級数の新しい 4 項間関係式と 4 種類の積公式が得られた (cf. [TE2])。

[TE1] 北山秀隆, 南拓弥, 西山尚志, 田川裕之, 鷲山峻大, 山本紀代, 算数・数学教育の教材としてのハノイの塔の考察と拡張, 和歌山大学教育学部紀要 - 教育科学 -, 68, 189-196 (2018).

[TE2] 北山秀隆, 松山ともこ, 西口正純, 西山尚志, 田川裕之, 田窪佳寿子, 数学教育の教材としてのフィボナッチ数の考察とフィボナッチ数のべき乗和の公式の一般化, 和歌山大学教育学部紀要 - 教育科学 -, 69, 59-66 (2019).

- (6) 拡張されたカタラン数 (Fuss Catalan number, Raney number) の合成積を超幾何級数の等式を利用して証明し, 系として, 超幾何級数のべき乗に関する新しい等式及び既知の等式の拡張となる偶数項のみからなるカタラン数の合成積が得られた (cf. [T1])。さらに, 拡張されたカタラン数の z -analogue であり, ナラヤナ多項式の拡張となる多項式についての合成積を, Appell 超幾何級数の発展形となる 2 変数の和公式を利用することで求め, 系として, $(4,3)$ 型の超幾何級数の和公式をはじめとする多数の和公式が得られた (cf. [T2])。

[T1] 田川裕之, 拡張されたカタラン数の合成積について, 和歌山大学教育学部紀要 - 自然科学 -, 70, 11-15 (2020).

[T2] 田川裕之, 拡張されたナラヤナ多項式の合成積について, 和歌山大学教育学部紀要 - 自然科学 -, 71, 135-141 (2021).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 0件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 田川裕之	4. 巻 第71集
2. 論文標題 拡張されたナラヤナ多項式の合成積について	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 和歌山大学教育学部紀要 - 自然科学 -	6. 最初と最後の頁 135-141
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.19002/AN00257977.71.135	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 田川裕之	4. 巻 第70集
2. 論文標題 拡張されたカタラン数の合成積について	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 和歌山大学教育学部紀要 - 自然科学 -	6. 最初と最後の頁 11-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.19002/AN00257977.70.11	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 北山秀隆, 松山ともこ, 西口正純, 西山尚志, 田川裕之, 田窪佳寿子	4. 巻 第69集
2. 論文標題 数学教育の教材としてのフィボナッチ数の考察とフィボナッチ数のべき乗和の公式の一般化	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 和歌山大学教育学部紀要 - 教育科学 -	6. 最初と最後の頁 59-66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.19002/AN00257966.69.59	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 北山秀隆, 南拓弥, 西山尚志, 田川裕之, 鷲山峻大, 山本紀代	4. 巻 第68集第1巻
2. 論文標題 算数・数学教育の教材としてのハノイの塔の考察と拡張	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 和歌山大学教育学部紀要 - 教育科学 -	6. 最初と最後の頁 189-196
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.19002/AN00257966.68(1).189	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

和歌山大学教育学部田川研究室ホームページ
<http://web.wakayama-u.ac.jp/~tagawa/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------