

令和 2 年 6 月 23 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05062

研究課題名(和文)有限群の部分群束と素数グラフ

研究課題名(英文)Subgroup lattices and prime graphs of finite groups

研究代表者

飯寄 信保 (Iiyori, Nobuo)

山口大学・教育学部・教授

研究者番号：00241779

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究で得られた主な結果は次の通りである。(1)一般線形群の部分群束のホモロジー群を計算するアルゴリズムを与えた。(2)有限群Gの位数を割り切る素数の集合を $\pi(G)$ とし $\pi(G) = \pi_1 \cup \pi_2$ を直和とする。Gのべき零部分群束のホモロジー群と π_1 , π_2 のそれとの関係をマイヤー・ビートリス系列を用いて表した。(3)Gの部分群束をクイバーと考え、その表現を用いて、Gの正則元の集合上の類関数のなす指標環の類似を見出し、複数の類似の間にフロベニウスの相互律の類似が成り立つことを示した。(4)(3)の状況の下で素数 p, q についてのモジュラー指標の関係を示すカルタン行列の類似を見出し、それが正則であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

通常、有限群の表現論は主に単一の標数に関する表現、またはその指標について考察されるか、或は、2つの標数 $0, p$ (素数) の場合について考察がなされてきた。本研究では複数の素数に対する指標間の関係を部分群束が統率すると考え、クイバー(部分群束)の表現の視点から異なる標数のモジュラー指標達の関係を調べることによって、複数の標数のモジュラー指標間においてもカルタン行列、フロベニウスの相互律等の重要な性質・概念の類似を見出すことができた。このことから本研究は群の研究における新しい視点を与えるものと考えられ、今後の有限群の研究に寄与することが期待できる。

研究成果の概要(英文)：The main results obtained in this study are as follows.

(1) We have found an algorithm to compute homology groups of subgroup lattices of general linear groups. (2) Let $\pi(G)$ be the set of prime divisors of the order of a finite group G and let $\pi(G) = \pi_1 \cup \pi_2$ be a disjoint union. Then we found the relation among the homology groups of nilpotent i -subgroup lattice and the homology groups of nilpotent i -subgroups lattices ($i=1,2$) via Mayer-Vietoris sequence. (3) Let p and q be prime numbers. We defined a generalized Cartan matrix which describes relations between Brauer p -characters and Brauer q -characters (an ordinary Cartan matrix describes relations between ordinary characters and Brauer p -characters.) and we show it is a regular matrix.

研究分野：代数学

キーワード：有限群 部分群束 クイバ 素数グラフ ブラウワー指標 表現論

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

有限群の研究をする際に、群の位数を割り切る素数の集合を頂点集合とする素数グラフが非常に役に立つことが多い。この素数グラフは群の位数を割り切る素数たちの関係を大まかに表しているものであり、指標を通して表現論と接点を持っている。また、群の部分群束は主に p -部分群束について考察がなされており、有限幾何や表現論と関係して研究が進んでいる。一方、有限群の表現の研究は、一つの素数 p を固定し p を標数とする体上の表現、モジュラー指標を考察するか、モジュラー指標と通常指標間の関係を考察することが多い。これらは非常に興味あるものであるが、この 3 者が結びついて研究が進められることはほとんどなく、素数グラフの示す複数の素数の間の関係を表現論などから考察されることはあまりない状態であった。

2. 研究の目的

有限群の p 部分群束の幾何は、表現論および構造論との関係から研究が進められている。また、素数グラフ論は、有限単純群の分類定理が完成した後、急速に発展し有限群の構造の研究において重要なものになっている。本研究の目的は、この二つを結び付け、有限群の部分群束の構造と群のそれとの関係を幾何的・表現論的に明らかにすることである。即ち、有限群の部分群束を単体的複体と見なしそれについての幾何的考察によって群の構造をしらべること、部分群束をクイバーと考え、その表現を考えることによって群の部分群の表現達の関係を調べることなどが主な目的である。

3. 研究の方法

群論的性質 P に対し、有限群の P -部分群束は半順序集合であるので、部分群束の単体的複体を考えることができる。 P としてべき零性を考えれば、 P -部分群束が連結である必要十分条件は素数グラフが連結であることである。このように部分群束の単体的複体の構造と群の構造の間には無視できない関係があると予想され、それを明らかにするために部分群束の単体的複体のホモロジー群等について考察を進める。

また、部分群束をクイバーと考え、各点(これは部分群)にその指標環(通常、またはモジュラー)を対応させる。また、部分群 K, H に対し $K \rightarrow H$ は矢となる条件は H が K の部分群であるので、 $K \rightarrow H$ に対し K の指標環(モジュラー指標環)から H の指標環(モジュラー指標環)への制限写像を対応させることができる。この二つの対応の組は、クイバーの表現となっている。この表現は、モジュラー指標の標数ごとに異なるものを与えている。複数の素数に対するクイバーの表現を考え、それらの間の射を考察することにより異なる標数の表現の間の関係或は群の構造の解明を進める。また、クイバーの表現で $K \rightarrow H$ に対応する制限写像は一意に定まるが、通常指標などで重要な働きをする逆向きの写像 $H \rightarrow K$ は一般の表現に関しては与えられていない。この点も踏まえ、クイバーに逆向きの矢($H \rightarrow K$)を加えてできるクイバーについても同様な考察を行う。

4. 研究成果

本研究で得られた主な結果は次の通りである。

(1)一般線形群の部分群束のホモロジー群を計算する際の対象となる部分群を決定するアルゴリズムを与えた。

(2)有限群 G の位数を割り切る素数の集合の部分集合を S とし G を共通部分のない二つの集合に分割する： $G = U \cup 2$ 。 G のべき零 p -部分群束を A 、 G のべき零 1 -部分群束を A_1 、 G のべき零 2 -部分群束を A_2 とする。 A からべき零 2 -部分群を除いて得られる部分複体を B とし、

同様に A からべき零 1-部分群を除いて得られる部分複体を C とする。このとき、A1 と B 及び A2 と C がそれぞれホモトピー同値であることを示し、マイヤー-ベリトリス系列を用いて

$$\dots H_n(B \cap C) \rightarrow H_n(A_1) \oplus H_n(A_2) \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_{n-1}(B \cap C) \rightarrow \dots$$

なる完全系列をえた。

(3) 有限群 G の部分群束を \mathcal{H} とし、 \mathcal{H} を素数の集合とする。G の要素が正則であるとは、 \mathcal{H} の任意の素数 p がその要素の位数を割り切らないことである。任意の $H \in \mathcal{H}$ に対し有理整数上の(通常)指標環を $B(H)$ とする。この $B(H)$ の各要素を \mathcal{H} の正則元全体に制限したものの集合を $B_{\mathcal{H}}(H)$ とすれば、 $B_{\mathcal{H}}(H)$ は可換環となる。 \mathcal{H} が 1 つの素数からなるときは、モジュラー指標のなす指標環と一致する。 \mathcal{H} に対し $B_{\mathcal{H}}(H)$ を、矢 $K \rightarrow H$ に対して制限写像を対応させることにより、 \mathcal{H} の表現を得ることができる。 \mathcal{H} に逆向きの矢を加えてできるクイバーを $\mathcal{H}^{\text{op}}(\text{ud})$ とする。

\mathcal{H} の矢 $K \rightarrow H$ の逆向きの矢である $H \rightarrow K$ に対して自明なもの以外は本研究以前には定まっていなかったと思われるが、適当な条件の下で 3 つの種類の写像を対応させ $\mathcal{H}^{\text{op}}(\text{ud})$ を定義し、通常指標の場合と同様にフロベニウスの相互律の類似が成り立つことを示した。これらの定義については、多くの準備が必要となるので論文を参照してもらいたい。この写像を用いて、次のような事実も示すことができる。

命題 任意の通常指標 f, g に対し、 $f(x)g(x)$ (但し x は \mathcal{H} の正則元を走る) は \mathcal{H} の位数の成分で割り切れる。

一方、複数の素数の集合 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ についての $B_{\mathcal{H}_1}(H), B_{\mathcal{H}_2}(H), \dots$ らの関係についてであるが、これらの可換環に基底を自明な場合を除き統一的に与えることが難しいことで現時点でも困難である。しかし $|\mathcal{H}| = 1$ の場合は、既約通常指標、既約モジュラー指標など考えることができ、これらの基底に関して $B_{\mathcal{H}_1}(H)$ と $B_{\mathcal{H}_2}(H)$ の間に射を定義することができる。このようにしてクイバー $\{G \text{ の位数を割り切る素数} \} \cup \{ \}$ (矢は含有関係) についての表現を定めることができる。道 $\{p\} \rightarrow \{q\} \rightarrow \{p\}$ の様に始点と終点が一致する道の表現を $\{p, q\}$ 正則元全体に制限したものの基底についての表現行列を一般カルタン行列と呼ぶことにすれば、道 $\{p\} \rightarrow \{q\} \rightarrow \{p\}$ についての一般カルタン行列は正則であることがわかった。また $|\mathcal{H}| = 2$ の場合にもカルタン行列の一般化を定義することができ、それも正則であることを示した。このことの詳細についても論文を参照してもらいたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Nobuo Iiyori and Masato Sawabe	4. 巻 42 Vol 2
2. 論文標題 Quiver representations, group characters and prime graphs of finite groups.	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Tokyou Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3836/tjm/1502179297	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nobuo Iiyori and Masato Sawabe	4. 巻 231
2. 論文標題 Partially ordered sets of non-trivial nilpotent -subgroups II	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 197-218
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) //doi.org/10.1016/j.topol.2017.09.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 飯寄信保
2. 発表標題 クイバーの表現と有限群の部分群束
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----