様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月　８ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５０６６

研究課題名（和文）有限単純群の作用する代数構造を用いた単純群の研究

研究課題名（英文）Resarch on simple groups with algebraic structures on which a finite simple group acts

研究代表者

千吉良　直紀（Chigira, Naoki）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・准教授

研究者番号：４０２９２０７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：散在型有限単純群を中心としてその群が作用する符号、格子、可換非結合代数で結合的内積を持つものなどの代数構造を決定した。特に散在型有限単純群の１つであるラドヴァリス群の作用する4060次元空間内の2030次元のなす自己直交符号の構成、関連するラドヴァリス群の構造の研究を行った。また、散在型有限単純群であるJ_2やM_{12}、また単純群ではないが、3S_7や2 3S_6などの群が作用する既約表現の可換非結合代数の積構造について研究成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
散在型有限単純群をより理解するためには符号、格子、可換非結合代数などの代数的構造で群の構造を反映するものをうまく構成することが重要である。2元体上の自己双対符号と散在型有限単純群の作用に関してラドヴァリス群は特徴的であり意義がある。また可換非結合代数の存在はいくつかの群について知られていたが、実際に積構造を構成することで群構造を詳しく知られる手掛かりの1つが得られたことになる。

研究成果の概要（英文）：We consider codes, lattices, commutative non-associative algebras with associative inner product on which some finite groups, especially some sporadic simple groups, acts. In particular, we construct self-dual codes invariant under the Rudvalis simple group, which is one of the sporadic simple groups. Also we study the properties of the Rudvalis group.Also we study a commutative non-associative algebra with associative inner product for J_2, M_{12}, 3S_7 and 2 3S_6.

研究分野：代数学

キーワード：単純群　符号　格子　代数構造

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

研究開始前に散在型単純群に関する研究として 12 次のマシュー群の初等的な構成、ヤンコ群 J_2 の作用する 2 元体上の自己双対符号の構成などの研究を行っていた。また、群が置換群として作用する 2 元体上の符号の研究では群の位数 2 の元の置換としての固定点集合が重要な役割を果たすという結果も得ていた。さらにラドヴァリス群の作用する 2 元体上の自己双対符号の存在について部分的な結果を得ていた。３種類存在するが、それをうまく構成するため、ラドヴァリス群の作用する 28 次元の複素格子の研究も行っていた。また、12 次のマシュー群の作用するランク 45 の格子の構成および群構造との関係、その格子を用いて 12 次のマシュー群が自己同型群として作用する非結合的可換代数についてその積構造等を決定していた。このように散在型単純群にまつわる研究は符号、格子、可換代数といった代数構造を用いて研究を行う方法があり、それらの代数構造は非常に特徴的で興味深い構造を持ったものが多い。その発想のもとには古くから研究されている 24 次のマシュー群 M_{24} を自己同型群にもつゴーレイ符号、コンウェイ群の中心拡大が自己同型群として作用するリーチ格子、さらにはモンスター単純群 M が作用する 196883 次元の既約表現上で定義される可換非結合代数などがある。しかし他の群ではこのような研究はそれほど多くなされていないのが現状である。本研究では新しい代数構造の構成などを通して有限単純群、特に散在型単純群の構造を研究することに注目した。特に新しい代数を数多く構成し、それらと群の関係を調べることが群の研究には必要である。

２．研究の目的

有限単純群の作用する代数構造を見出し、群構造をわかりやすく記述する。具体的には置換群としての固定点集合、群の作用する符号や格子、さらには群の作用する表現空間に定義される可換代数構造など代数的構造を構成する。それらを用いて単純群の性質を明らかにすることを目的とする。特に

（１）　固定点の集合（置換群）や固定部分空間（行列群）を用いた群の構造の研究
（２）　有限群の作用する符号の構成およびそれを用いた有限群の研究
（３）　有限群の作用する格子の構成およびそれを用いた有限群の研究
（４）　有限群の作用する可換非結合代数で結合的内積を持つものの構成およびそれを用いた有限群の研究
（５）　有限群の作用する代数構造の自己同型群の考察

を行う。

（２）（３）に関してはこれまで継続してきたラドヴァリス群に関する研究を深める。特にラドヴァリス群が作用する自己双対符号についてこれまで得られている結果をさらに発展させる。付随してラドヴァリス群の構成、構造、関連する組合せ構造についても研究を行う。

（４）に関して、散在型単純群の 1 つである 12 次のマシュー群 M_{12} は 45 次元の空間に既約に作用している。この既約表現内に可換非結合代数の構造が入る。その積についてはすでに決定している。その際に格子を用いている。この方法を別の散在型単純群 J_2 でも適用し、可換代数構造を決定する。またその他の群についても可換非結合代数構造を決定する。また関連する群の一般論や指標に関する問題にも取り組む。J_2 についてはこれまでの研究で 2 元体上の自己双対符号の自己同型群になっていることが分かっている（千吉良・原田・北詰）。その性質をうまく利用することで格子構造を決定し、それを用いて代数構造、特に積構造を決定する。

（５）は非常に難しい問題であり、自己同型群の有限性、位数 2 の元の中心化群の特徴づけなどを行うのが今までの知られている考察方法である。これをもとに自己同型群を決定するためには積構造と代数構造を詳しく調べることが重要である。

３．研究の方法

群を調べる上で群を具体的にうまくとらえる必要がある。１つの方法は置換群としてとらえることであり、もう１つは行列群としてとらえる方法がある。置換群としてとらえる場合、部分群の軌道分解や位数 2 の元の固定点集合などを用いることが有効である。一方行列群としてとらえる場合はもう少し複雑である。求めたい次元のベクトル空間への作用として群を直接とらえるのは一般には難しい。そこで群が作用しうる少し大きいベクトル空間内に、格子など、群が作用する代数構造を構成し、その上への作用として、群が作用するような次元の小さい部分空間をとることが重要である。そのため、本研究では具体的な計算には計算ソフト Magma を用いて実際に格子などの代数構造を構成する。そこへの作用として群を決定する。それをもとに可換非結合代数構造等の計算を具体的に行い、代数構造を決定する。

４．研究成果

（１）ラドヴァリス群の作用する自己双対符号とラドヴァリス群の性質について：

符号とは有限体上のベクトル空間の部分空間のことである。特に 2 元体上の符号は古くから散在型単純群との関連が見出され、単純群の研究にも用いられてきた。散在型単純群の１つであるマシュー群 M_{24} はゴーレイ符号と呼ばれる 2 元体上の 24 次元ベクトル空間のある 12 次元部分空間である符号の自己同型群であり、ゴーレイ符号を用いることで M_{24} の性質を詳しく調べることができるということは古くから良く知られている。この符号のおかげで散在型単純群の中でもマシュー群が扱いやすい群で多くの研究がなされている。ゴーレイ符号は自己双対符号というとても良い特別な性質を持っている。2 元体上の自己双対符号に作用する散在型単純群は他に、同じゴーレイ符号から得られる 22 次元ベクトル空間の 11 次元部分空間のなす符号に M_{22} や、2 元体上の 100 次元ベクトル空間の 50 次元部分空間のなす符号に作用するヤンコ群 J_2 が知られている。
26 個の散在型有限単純群の１つであるラドヴァリス群 Ru は 4060 次の置換表現をもっている。これまでの研究でラドヴァリス群が自己同型群として作用する 2 元体上 4060 次元ベクトル空間のある 2030 次元空間のなす自己双対符号が 3 種類あることが分かっていた。しかしながら 4060 次元という大きい次元のベクトル空間を扱うため、その存在しかわからず具体的な構成方法は確立できていなかった。そこでラドヴァリス群の構成方法をはじめから見直しを行い、ラドヴァリス群の性質を詳しく調べることを行っっていた。まずラドヴァリス群は 28 次元のガウス整数環上の格子の自己同型群として作用することが古くから知られていた。そこでこの格子を詳しく調べた。特に格子を生成する最小ベクトルのユニタリ群 $U_3(3)$ に関係する記述、シュリクハンデグラフと呼ばれるグラフとの関係、一般 6 角形の構成、格子のテータ級数の決定、ラドヴァリス群が作用するランク 3 グラフの 2-デザインを用いた再構成、28 次元格子のベクトルを用いたホフマンシングルトングラフの構成、いくつかの特徴的な部分群の構成などを行った。この研究はこれまでの研究を継続した形で行ってきた。その過程でラドヴァリス群の作用する 4060 次元ベクトル空間の 2030 次元部分空間のなす 3 種類の符号はホフマンシングルトングラフを用いて構成できることがわかった。特にホフマンシングルトングラフの詳しい性質を調べることが本研究において重要であった。本研究結果は論文として 2018 年に出版された。また、一連のラドヴァリス群の関する研究についても研究論文としてまとめ、現在投稿中である。

J_2 の作用する 36 次元の可換非結合代数
散在型単純群 J_2 は 100 次の置換表現をもつ。この 100 次の置換表現を用いて 2 元体上の 100 次元ベクトル空間のある 50 次元の部分空間のなす自己双対符号の研究を行なってきた。
一方、J_2 には 36 次の既約表現があり、指標の簡単な計算で、この 36 次元には可換非結合代数で結合的内積をもつもの（簡単のため以後可換非結合代数とよぶ）の構造がスカラー倍を除いて一意的に定まることを示すことができる。この可換非結合代数の積構造を決定した。具体的にはまず J_2 の作用する 36 次元空間を（有理数体上の）100 次元ベクトル空間の部分空間として捉えたい。置換表現を用いて有理数体上の 100 次元ベクトル空間へ J_2 を作用させる。100 次元の空間の中に J_2 の 2A と呼ばれる位数２の共役類に属する元の固定点集合を用いて作るベクトルで生成したランク 36 の格子で J_2 が作用するものをうまく構成する。この格子のベクトルの間の内積の関係を詳しく調べることによって格子の生成元たちの間の積構造を決定することができた。このように群が作用する格子をうまく見つけることによって可換非結合代数の積構造を決めることができることがわかった。J_2 の場合その積構造を具体的に書いてみるとかなり複雑になっている。積構造がわかり易く記述できるように基底をうまく取り直すことができれば、可換非結合代数の自己同型群を決定することができると考えている。今後の研究課題である。

$3S_7$ の作用する 12 次元の可換非結合代数
3 互換群と呼ばれる群がある。その中に $3S_7$ という群がある。散在型単純群ではないが、３互換群の系列に散在型単純群のフィッシャー群が出てくるため重要な群の１つである。$3S_7$ は 12 次元の既約表現を持ちその中に可換非結合代数で結合的内積がスカラー倍を除いて一意的に定まる。この可換非結合代数の構造はスミスによって決定されている。この積の再構成を行なった。具体的には $3S_7$ の 63 次元の空間へ置換表現を用いて作用させ、その中から 12 次元の部分空間を置換群としての軌道分解などから決めることができる。その作用を用いて可換非結合代数の積構造を記述できることが分かった。さらにその積構造をわかりやすく記述することを試みた。4 元体上の 6 次元ベクトル空間のある 3 次元部分空間にヘキサコードと呼ばれるものがある。ヘキサコードにはウエイト４のベクトルがあり、そのウエイト４のベクトルを用いることで、積構造が記述できることがわかった。この結果の一部を口頭発表した。可換非結合代数の自己同型群を決める問題が残っている。

M_{12} の作用する 45 次元の可換非結合代数

M_{12}の 45 次元の可換非結合代数の積構造についてはすでに決定していた。しかしながら積構造は J_2の場合と同様に複雑で、自己同型群を決定するにはよりよい基底の取り方およびその間の積構造がなるべくわかりやすい構造であってほしい。2B と呼ばれる位数２の共役類の元の中心化群には位数 8 の基本可換部分群で正規部分群になるものがある。特にこの正規部分群は単位元以外は全て 2B 共役類の元になる。この部分群を用いて 45 次元の可換非結合代数を分解すると指標を用いて積構造が記述できることがわかった。この結果の一部を口頭発表した。この方法を用いることで他の群が作用する可換非結合代数にも適用可能なものであると思われる。またこの積構造の精査をさらに進めることで自己同型群を決定することができると考えている。M_{12}の作用する 45 次元の空間には 24 次のマシュー群 M_{24}が既約に作用している。M_{24}の極大部分群に$2^6:3S_6$という構造の群がある。この群も 45 次元の既約表現があり、可換非結合代数で結合的な内積を持つものの構造がスカラー倍を除いて一意的に定まること。この積構造も同様の手法で決定できた。これらの可換非結合代数たちの関係を調べることは非常に興味深い問題に発展すると考える。自己同型群を完全に決定することが本問題の重要課題の１つであるため、今後継続して研究を進めていく必要があると考えている。

単純群の作用する格子について
置換群のある部分群を取りその部分群の軌道分解から有理数体上のベクトルを作って格子を構成すると様々な興味深い格子を構成することができる。上述の J_2の場合や M_{12}の場合も群が作用することを記述するのにこの手法を用いた。この結果を口頭発表した。実験的に Magma などで計算をしてみると、非常に面白い格子が構成できている。しかしながらこれらは今のところ各群とその各置換表現についてケースバイケースでしか結果が得られていない。特に格子の最小ノルムの部分が扱いやすいものになる格子が沢山得られる。理論的に群が作用する様子と格子のベクトルとの関係が理解できると、より興味深い問題になると思われる。今後発展させるべき問題であると考えている。

Brauer-Wielandt の定理の拡張
共役類や指標の関係を調べている段階で、原田耕一郎氏による Brauer-Wielandt の定理の拡張をさらに拡張できることがわかった。これはその後の研究結果と合わせて論文投稿準備中である。群の構造を研究する上で共役類や指標は基本的なものであり、一般論として研究を行なっていく必要がある。この問題は群の構造と密接に関係していると思われ非常に興味深い問題である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Naoki Chigira, Masaaki Kitazume	４．巻 34
２．論文標題 Self-dual codes related to the Rudvalis group	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Graphs and Combinatorics	６．最初と最後の頁 769--775
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00373-018-1912-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　5件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 千吉良直紀
２．発表標題 A commutative nonassociative algebra for 3S7
３．学会等名 第34回代数的組合せ論シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 千吉良直紀
２．発表標題 3S_7とhexacode
３．学会等名 第29回有限群論草津セミナー（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 千吉良直紀
２．発表標題 単純群と格子
３．学会等名 第28回有限群論草津セミナー（招待講演）
４．発表年 2016年

1．発表者名 千吉良直紀
2．発表標題 45次元可換非結合代数について
3．学会等名 第31回有限群論草津セミナー（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 千吉良直紀
2．発表標題 On an integer matrix for a finite group
3．学会等名 代数的組合せ論と関連する群と代数の研究（招待講演）
4．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考