

令和 4 年 9 月 2 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05067

研究課題名(和文) 微分概念の拡張と非可換不変式論・母函数論

研究課題名(英文) Generalization of derivations, noncommutative invariant theory, and noncommutative generating functions

研究代表者

伊藤 稔 (Minoru, Itoh)

鹿児島大学・理工学域理学系・教授

研究者番号：60381141

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：阿賀岡芳夫によって与えられた高階のCayley-Hamilton定理の不変式論での役割を論じるための代数構造を導入した。

日高昌樹氏と共同で「自然数 n が2以外の素因数を高々2個しかもたないとき、1の原始 n 乗根におけるSchur多項式の値は1, 0, -1のみ」という結果を与えた。さらに下吉仁平氏と共同で、行列式の冪の展開係数の研究を行った。指数が素数 p を用いて $p-1$ と表されるときに行列式の冪の展開係数に0が含まれないことはD. G. Glynnによって示されていたが、行列のサイズが3以上の場合には、この逆も成立することがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

高階のCayley-Hamilton定理は、様々な多項式環における不変式論で役立つが、「高階の行列環」における不変式論を考えれば、より直接的に、このCayley-Hamilton型定理自体が生成元の関係式の記述そのものと見なせる。この自然でわかりやすい見方で整理することができた。

日高氏との共同研究成果は、円分多項式の係数に関する有名な事実の一般化で、注目すべき結果である。下吉氏との共同研究成果も、証明はごく初等的だが、予想外の結果である。またこの研究の元になったGlynnの結果についても、偏極作用素を用いた自然で易しい不変式論的な新証明を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：I introduced algebraic structures to discuss the Cayley-Hamilton theorem of higher order given by Y. Agaoka.

M. Hidaka and I proved that the Schur polynomials in all n th primitive roots of unity are 1, 0, or -1, if n has at most two distinct odd prime factors. Moreover, J. Shimoyoshi and I studied on the existence of zero coefficients in the powers of the determinant polynomial of order n . D. G. Glynn proved that the coefficients of the m th power of the determinant polynomial are all nonzero, if $m = p - 1$ with a prime p . We proved that the converse also holds, if n is 3 or more.

研究分野：不変式論

キーワード：不変式論 Cayley-Hamilton定理 Schur多項式 1の原始冪根 行列式 正標数

1. 研究開始当初の背景

梅田亨, 和地輝仁, 研究代表者らによって, Capelli 型恒等式を中心に, リー環の普遍包絡環や微分作用素環などの非可換代数の不变式論が研究されてきた. その中で外積代数の元を形式的変数とする母函数が強力な道具だった. この状況で, 近年さらに次の二つの特筆すべき進展があった:

(1) テンソル代数における微分概念. [I1] において研究代表者は, テンソル代数と無限対称群を融合させた代数を構成した. この代数では自然に微分概念が考えられる. このテンソル代数の拡張とその上の微分を用いて, Schur-Weyl 双対性や higher Capelli identity が見通しよく証明できる. 後者はテンソル代数の元を形式的変数とする非可換母函数論と見なせる. さらに[I2] では, このテンソル代数の拡張とその上の微分の q 類似を構成して, これを用いて q -Schur-Weyl 双対性を証明した.

(2) 外積代数における不变式論. n 次正方行列のなすベクトル空間上の外積代数における conjugation による不变元全体は部分環をなすが, この不变式環は抽象的には n 元で生成される外積代数に同型になる. 最近, [BPS], [DPP], [I3]などでこの不变式環の生成元たちを係数とする Cayley-Hamilton 定理の類似が発見された. この定理は行列環の元を形式的変数とする母函数の関係式とも見なせる. この Cayley-Hamilton 型の定理は Amitsur-Levitzki 定理の精密化とも言え, 同様に議論できる外積代数における不变式論から新しい Amitsur-Levitzki 型の定理も得られる. このような Amitsur-Levitzki 型の定理とのつながりという点でも興味深いものであった. さらに[I4]では twisted immanant という行列式に似た函数を考えて, これを用いて上述の外積代数の不变式環の生成元の表示を与えた. この twisted immanant には(行列式の積公式の一般化である) Cauchy-Binet 公式の類似や, Schur 函数に関する Cauchy 恒等式の類似などもなりたつ.

[BPS] M. Brešar, C. Procesi, Š. Špenko, Quasi-identities on matrices and the Cayley-Hamilton polynomial, Adv. Math. 280 (2015), 439--471.

[DPP] C. De Concini, P. Papi, C. Procesi, The adjoint representation inside the exterior algebra of a simple Lie algebra, Adv. Math. 280 (2015), 21--46.

[I1] M. Itoh, Extensions of the tensor algebra and their applications, Comm. Algebra 40 (2012), no. 9, 3442--3493.

[I2] M. Itoh, A q -analogue of derivations on the tensor algebra and the q -Schur-Weyl duality, Lett. Math. Phys. 105 (2015), 1467--1477.

[I3] M. Itoh, Invariant theory in exterior algebras and Amitsur-Levitzki type theorems, Adv. Math. 288 (2016), 679--701.

[I4] M. Itoh, Twisted immanant and matrices with anticommuting entries, Linear Multilinear Algebra 64 (2016), 1637--1653.

2. 研究の目的

本研究の目的は, 母函数の考え方の下で非可換代数の不变式論を推進することである. 非可換代数の不变式を, 必要に応じて母函数の一種(非可換代数の元を形式的変数とする母函数)と見なす. さらに武器が, 「テンソル代数における微分」などの微分概念の一般化である. この「微分」は母函数から不变式を取り出す道具になる. また作用の双対性や不变式論の第一基本定理(不变式環の生成元の決定)を証明する道具にもなる. このような「微分」を生かして母函数論と不变式論を連動させることを目的とした.

より具体的には, 次のようなかたちの成果を期待していた:

- (1) 不变式の生成元の記述, 生成元のあいだの関係式の記述.
- (2) 「微分」による双対的な作用の表示, 作用の双対性の証明.
- (3) 行列式(さらに immanant などの行列式の一般化)の非可換な枠組みへの拡張.

3. 研究の方法

「微分概念の拡張と非可換不变式論・母函数論」という一般論・抽象論をいきなり目指すのではなく, この枠組みでうまく扱える具体例を積み上げていく. 対象とする非可換代数としては, テンソル代数, 外積代数, 微分作用素環, リー環の普遍包絡環, 量子群, 群環, 行列環などを念頭においていた. そしてまずは Cayley-Hamilton 型定理が関係する不变式論を手掛かりに研究を進める方針だった.

代数と微分の構造を抜きにすれば, 本研究課題は表現論の研究でもある. 研究分担者や国内外の研究者との討論を通じて, 表現論の最新の研究成果とも連動させる.

4. 研究成果

得られた成果は大きく次の3つの研究に分けられる. (1) 高階の Cayley-Hamilton 定理の研究.

(2) Schur 多項式の特値の研究. (3) 行列式の冪の展開係数の研究. このうち(2), (3)は主に可換な枠組みの成果で, 当初に期待していたのとは異なる方向のものである. また「微分」は限定的な役割しか果たしていない. しかし「母函数論と不変式論の連動」という点では, これらも本研究の指針に沿って得られた成果である. それぞれの成果をくわしく述べると, 以下のようになる.

(1) 阿賀岡芳夫によって与えられた高階の Cayley-Hamilton 定理について, その不変式論における位置づけを明確にした. 高階の Cayley-Hamilton 定理は, さまざまな多項式環における不変式論で役立つが, 「高階の行列環」における不変式論を考えれば, より直接的にこの Cayley-Hamilton 型定理自体が生成元の関係式の記述そのものと見なせる. この自然でわかりやすい見方で整理することができた. 具体的には「wreath 代数」と「トレースつき wreath 代数」という概念を与えた. これらの代数は, 言わば無限対称群との wreath 積の抽象化で, 準同型写像や部分代数, イdeal, T-イdeal などの概念も自然に定義できる. この枠組みの下で「高階の行列環」における不変式環の生成元の関係式が「最も高階の Cayley-Hamilton 定理(これは結局単なる交代化作用素の等式となる)の生成する T-イdeal」という形で捉えられることになる. 高階の Cayley-Hamilton 定理については, その Pfaffian 版も得ることができた. これもいろいろな多項式環における不変式論で鍵となる役割を果たすが, そのしくみについても行列式版と同様のかたちで整理することができた.

(2) 日高昌樹氏と共同で Schur 多項式の特値の研究を行い, 「自然数 n が 2 以外の素因数を高々 2 個しかもたないとき, 1 の原始 n 乗根における Schur 多項式の値は 1, 0, -1 のみ」という結果を与えた. n の条件は比較的ゆるく(たとえば 105 未満の自然数はすべて該当), 分割には何の条件もない. 非常に多くの自然数 n と分割に対して, この値が 1, 0, -1 にかぎられるのは興味深い. この結果は, (1^k) と (k) という分割の場合には既知の結果だった. (1^k) の場合は「条件をみだす自然数 n に対して, n 次の円分多項式の係数は 1, 0, -1 のみ」という 19 世紀から知られている有名な事実当たる. また (k) の場合は, 本結果は円分多項式の逆数の係数の性質に言い換えられるが, これは 10 年ほど前に P. Moree が与えた結果がある. このような特別な分割の場合に知られていた結果を, 一般の分割に拡張した.

(3) 下吉仁平氏と共同で, 行列式の冪の展開係数の研究を行った. 冪指数が素数 p を用いて $p-1$ と表されるときに行列式の冪の展開係数に 0 が含まれないことは D. G. Glynn によって示されていたが, 行列のサイズが 3 以上の場合には, この逆も成立することがわかった. 証明は初等的であるが, 意外な結果であり興味深い.

またこの研究の元になった Glynn の結果についても, 新しい証明が得られた. Glynn の元々の証明は, 彼自身が導入した超行列式(hyperdeterminant)を用いている. この超行列式は正標数でのみ意味をなすが, 積を保つという性質をもった注目すべき超行列の函数であり, このような対象と結びつくのは興味深い. ただ証明としては風変わりな, 易しくもない. この結果には, 木本一史による別証明もあるが, この状況に対して, 偏極作用素を用いた自然で易しい不変式論的な新証明を得ることができた.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 9件）

1. 著者名 Itoh Minoru, Shimoyoshi Jimpei	4. 巻 579
2. 論文標題 A condition for the existence of zero coefficients in the powers of the determinant polynomial	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 231--236
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2021.03.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 伊藤稔	4. 巻 -
2. 論文標題 外積代数における不変式論, Cayley--Hamilton型定理, twisted immanant	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 2020年度表現論シンポジウム講演集	6. 最初と最後の頁 43--62
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 松本詔	4. 巻 2161
2. 論文標題 対称群のスピンの表現に対するStanley指標公式	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 58--72
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 日高昌樹、伊藤稔	4. 巻 2139
2. 論文標題 The Schur polynomials in all n th primitive roots of unity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 72~82
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Sho Matsumoto, Piotr Sniady	4. 巻 3
2. 論文標題 Linear versus spin: representation theory of the symmetric groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 249 ~ 280
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.92	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Sho Matsumoto, Piotr Sniady	4. 巻 26
2. 論文標題 Random strict partitions and random shifted tableaux	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Sho Matsumoto	4. 巻 14
2. 論文標題 A Spin Analogue of Kerov Polynomials	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.053	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sho Matsumoto and Jonathan Novak	4. 巻 25
2. 論文標題 A moment method for invariant ensembles	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Electronic Research Announcements	6. 最初と最後の頁 53--71
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/era.2018.25.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sho Matsumoto	4. 巻 24
2. 論文標題 Polynomiality of shifted Plancherel averages and content evaluations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annales Mathematiques Blaise Pascal	6. 最初と最後の頁 55-82
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/ambp.364	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Benoit Collins and Sho Matsumoto	4. 巻 14
2. 論文標題 Weingarten calculus via orthogonality relations: new applications	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.	6. 最初と最後の頁 631-656
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Minoru Itoh	4. 巻 64
2. 論文標題 Twisted immanant and matrices with anticommuting entries	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Linear and Multilinear Algebra	6. 最初と最後の頁 1637-1653
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03081087.2015.1112343	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sho Matsumoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Polynomiality of shifted Plancherel averages and content evaluations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annales Mathematiques Blaise Pascal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計28件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 伊藤稔
2. 発表標題 外積代数における不変式論, Cayley--Hamilton型定理, twisted immanant
3. 学会等名 2020年度表現論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 伊藤稔
2. 発表標題 行列式の冪の展開係数に0が含まれるための条件
3. 学会等名 2020年度表現論ワークショップ
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松本詔
2. 発表標題 対称群のスピン指標のStanley指標公式
3. 学会等名 JCCA2020-DMIA2020-SGT9 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松本詔
2. 発表標題 ほぼ正方形のヤング図形に対応する対称群の正規化指標
3. 学会等名 第2回 分布族・離散集合の幾何学とその周辺
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 日高昌樹、伊藤稔
2. 発表標題 The Schur polynomials in all n th primitive roots of unity
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「表現論とその周辺分野の進展」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 日高昌樹、伊藤稔
2. 発表標題 1の原始 n 乗根におけるSchur多項式の値
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本詔
2. 発表標題 Kerov多項式とStanley指標公式
3. 学会等名 可換確率論と非可換確率論の相互作用準備会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sho Matsumoto
2. 発表標題 Kerov polynomials and Stanley formulas for spin symmetric groups
3. 学会等名 Interactions between commutative and non-commutative probability (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 対称群のStanley指標公式とmapの数え上げ
3. 学会等名 Study Meeting on Graph and Curvature
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 対称群のスピン表現に対するStanley指標公式
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「表現論とその組合せ的側面」（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤 稔
2. 発表標題 高階のCayley-Hamilton定理を用いたある不変式環の記述
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤 稔
2. 発表標題 高階のCayley-Hamilton定理で記述される不変式論
3. 学会等名 琉球大学理学部数理科学科談話会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 伊藤稔
2. 発表標題 1の原始n乗根におけるSchur多項式の値
3. 学会等名 2018年度表現論ワークショップ
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤稔
2. 発表標題 高階のPfaffian版Cayley-Hamilton定理とある不変式環の記述
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Sho Matsumoto
2. 発表標題 Weingarten calculus and counting paths on Weingarten graphs
3. 学会等名 Random matrices and their applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松本詔
2. 発表標題 直交群の Weingarten calculus と Weingarten グラフ
3. 学会等名 2018年度 (第57回) 実函数論・函数解析学合同シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 対称群のスピノ表現に対するKerov多項式
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「組合せ的表現論の諸相」(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Sho Matsumoto
2. 発表標題 Weingarten calculus for random matrices associated with the compact symmetric space of class D III
3. 学会等名 Workshop on "Random Matrices and Related Topics" (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 伊藤 稔
2. 発表標題 トレース付きwreath代数を用いたある不変式環の記述
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 Weingarten calculus for Haar distributed matrices and Wishart matrices
3. 学会等名 確率・統計・行列ワークショップ松本2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 伊藤稔
2. 発表標題 An abstraction of the wreath product with the infinite symmetric groups
3. 学会等名 2016年度表現論ワークショップ
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 伊藤稔
2. 発表標題 無限対称群とのwreath積の抽象化
3. 学会等名 特殊函数と対称性
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 伊藤稔
2. 発表標題 On the Cayley-Hamilton theorem of higher order
3. 学会等名 ワークショップ「行列解析の展開」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 松本詔
2. 発表標題 マップの数え上げによるSchwinger-Dyson方程式の解の構成
3. 学会等名 鹿児島解析・確率論セミナー
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 Polynomiality of Plancherel averages on strict partitions
3. 学会等名 表現論がつなく数学2016
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 Polynomiality of Plancherel averages on strict partitions
3. 学会等名 RIMS集会「リー型の組合せ論」
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Sho Matsumoto
2. 発表標題 Plancherel measures on strict partitions: Polynomiality and limit shape problems
3. 学会等名 Workshop on Asymptotic Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 松本 詔
2. 発表標題 Introduction to Weingarten calculus via orthogonal relations
3. 学会等名 ワークショップ「行列解析の展開」
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	松本 詔 (Matsumoto Sho) (60547553)	鹿児島大学・理工学域理学系・准教授 (17701)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------