

令和 2 年 6 月 4 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05069

研究課題名（和文）保型L函数の特殊値の研究

研究課題名（英文）Special values of automorphic L-functions

研究代表者

古澤 昌秋（FURUSAWA, Masaaki）

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50294525

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：森本和輝（神戸大学）との共同研究によって、ヘッケ作用素の同時固有函数である次数2のジーゲル尖点形式に対して、虚二次体のイデアル群と対応するフーリエ係数の和とその虚二次体に対応する二次指標でひねったスピノル保型L函数の函数等式の中心での特殊値を結びつけるベッヘラー予想の証明を与えた。ベッヘラー予想は1980年代の中頃に定式化された予想であり、永らく未解決であった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

算術的なL函数の特殊値は、対応する数論的対象物の重要な情報を含んでいると予想されている。Birch & Swinnerton-Dyer予想及びその一般化にみられるように、函数等式の中心における特殊値は特に興味深い。本研究の成果であるベッヘラー予想は、GL(2)に関するWaldspurgerの定理の自然な一般化であるとみなすことができる。Waldspurgerの結果はこれまでに、楕円曲線及びGL(2)の保型形式の数論において、重要な局面で応用されてきた。我々の結果に対しても、今後、様々な応用が期待できる。

研究成果の概要（英文）：In a joint work with Kazuki Morimoto of Kobe University, we proved Boecherer's conjecture. It is a conjecture concerning degree two cuspidal Siegel modular forms which are Hecke eigenforms. More precisely, it predicted a relationship between the finite sum of Fourier coefficients over the binary quadratic forms corresponding to the ideal class group of an imaginary quadratic field and the central special value of the spinor L-function twisted by the quadratic character corresponding to the imaginary quadratic field. Siegfried Boecherer proclaimed the conjecture in the 1980's and it has been open till now.

研究分野：保型L函数

キーワード：保型L函数 L函数の特殊値 テータ対応

1. 研究開始当初の背景

おおまかに言って、ラングランズ予想によれば、数論的对象物から、オイラー積として定義される数論的 L 関数は、保型 L 関数によって表されると予想される。そして、数論的 L 関数の特殊値は、その数論的对象物の重要な不変量によって表されると予想されている。したがって、保型 L 関数の特殊値を研究することによって、対応すると予想される数論的对象物に関する重要な数論的情報を得ることが期待される。このことから、現代において、保型 L 関数の特殊値の研究は数論における中心的研究課題の一つとして広く認識されている。

もちろん、これまでに最も深く研究されてきたのは、楕円モジュラー形式に付随する保型 L 関数の特殊値である。代数群でいえば、 $GL(2)$ の保型形式に付随する保型 L 関数ということになる。楕円曲線が L 関数を媒介として重さ 2 の楕円尖点モジュラー形式と対応するという modularity theorem によって、楕円モジュラー形式の保型 L 関数の特殊値の研究は、楕円曲線に関する深い数論的結果を現在も脈々ともたらし続けている。

Modularity theorem の自然な一般化として、アーベル曲面と重さ 2 の次数 2 のジール尖点形式のスピノル L 関数を媒介とする対応が予想される。重さ 2 以外でも、重さ 3 の場合はジール 3-fold との関係があるなど、次数 2 のジール尖点形式のスピノル L 関数は極めて興味深い研究対象である。代数群でいうと、 $GSp(2)$ の保型形式の保型 L 関数ということになる。

2. 研究の目的

本研究は、次数 2 の正則ジール尖点形式でヘッケ作用素の同時固有函数であるものについて、ベッセル周期と呼ばれるフーリエ係数の虚二次体のイデアル類に対応する有限和が、スピノル L 関数をその虚二次体に対応する二次指標でひねって得られる保型 L 関数の函数等式を中心における特殊値と関係するという、ベッヘラー (Boecherer) 予想及びそのイデアル類群上の一次元表現が非自明な場合への一般化を証明することを目的として、神戸大学大学院理学研究科の森本和輝との共同研究として開始されたものである。古典的なフーリエ係数がスピノル L 関数の中心特殊値と関係するというベッヘラーの予想は、多くの専門家の興味を引いてきた。しかし、1980 年代にベッヘラーが予想を公にして以来、長い時間が経過したが、予想は未解決のままであった。

3. 研究の方法

ベッヘラーの予想について、古澤は 1990 年代のはじめからずっと興味を持ち続けていた。90 年代の前半には、奇数次元の直交群とメタプレクティック群の間のテータ対応を用いてベッヘラーの予想を証明する大まかなアイデアを得ており、その一部は Crelle's Journal に掲載された論文に公刊されていた。しかし、証明の計画全体を遂行するためには、重複度や既約性の問題など、テータ対応の基本理論の重要問題の多くが当時は未解決であったことが大きな障害として立ちはだかっており、さらなる追求を断念せざるを得なかった。

テータ対応による証明の試みは中断してしまっただが、その一方で、Joseph Shalika, 更にその後は Kimball Martin を加えた共同研究として、相対跡公式によるベッヘラー予想及びその一般化へのアプローチを 90 年代中頃から追求してきた。ベッヘラー予想は、楕円モジュラー形式に関する Waldspurger の定理の自然な一般化と考えることができる。Waldspurger 自身はテータ対応を用いて証明したが、その後 Herve Jacquet は相対跡公式を用いた 2 つの別証明を発見した。我々は Jacquet の 2 つの相対跡公式の $GSp(2)$ への一般化と、Erez Lapid の示唆に基づく新たな相対跡公式、計 3 つの相対跡公式を定式化し、それらに関する基本補題及び基本補題のヘッケ環全体への拡張に成功するなど、一定の進展をもたらすことができた。しかし、それよりも更に先に進むには、unipotent 群上の積分に伴う様々な解析学的な困難などを克服しなければならず、それらはそう簡単には解決できない問題であるように思われた。

一方、テータ対応の基本理論においては、Gan-Takeda による Howe 予想の完全解決、山名による doubling method の完成など、近年極めて著しい進展があった。この事実を鑑み、最新のテータ対応理論に精通する森本和輝との共同研究として、1990 年代初頭に考えていた、ベッヘラー予想へのテータ対応によるアプローチの再考察を、2015 年の秋頃から開始した。

4. 研究成果

再考察を開始してまもなく、前述の Crelle's Journal の論文で考察した奇数次直交群とメタプレクティック群の間のテータ対応による往復及びそれに伴う Whittaker 周期の引き戻しなどを考察することによって、トラス群上の 1 次元表現が自明であるようなベッセル周期に関して、周期の非消滅がひねられたスピノル L 関数の中心特殊値の非消滅を意味する、という Gross-Prasad 予想の一つの方向についての証明を与えることができた。この論文は 2017 年に、Mathematische Annalen において公刊された。

その後、Lapid-Mao によるメタプレクティック群上の保型形式の Whittaker 周期と随伴 L 関数の 1 での値との関係式、及び、Gan-Takeda による Siegel-Weil 公式、上述の直交群と

メタプレクティック群の間のテータ対応による往復についての Whittaker 周期の引き戻し、これら三つを組み合わせることによって、トーラス群上の 1 次元表現が自明な場合のベッセル周期と、ひねられたスピノル L 函数の中心特殊値の間の、市野 池田タイプの等式を示すことができた。この等式、すなわち、市野 池田タイプの Gross-Prasad 予想の精密化から、ベッヘラーの予想が従うことは、既に、Dickson-Pitale-Saha-Schmidt によって示されており、かくして、もともとのベッヘラー予想を証明することができた。論文は Journal of the European Mathematical Society に掲載が決定している。

トーラス群上の 1 次元表現が非自明な場合のベッヘラー予想の証明についても、森本和輝の精力的な研究によって、論文初稿は完成した。これを出版に至るように磨き上げることが、喫緊の課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Masaaki Furusawa	4. 巻 2055
2. 論文標題 On special Bessel periods for $SO(2n+1)$	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 96-98
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masaaki Furusawa, Kazuki Morimoto	4. 巻 138
2. 論文標題 On special values of certain L-functions II	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1117-1166
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1353/ajm.2016.0037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masaaki Furusawa, Kazuki Morimoto	4. 巻 368
2. 論文標題 On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for $SO(2n+1) \times SO(2)$	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 561-586
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s00208-016-1440-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Masaaki Furusawa
2. 発表標題 On special Bessel periods and the Gross-Prasad conjecture for $SO(2n+1) \times SO(2)$
3. 学会等名 Relative Trace Formula, Periods, L-Functions and Harmonic Analysis（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masaaki Furusawa
2. 発表標題 On Boecherer's conjecture
3. 学会等名 Modular Forms on Higher Rank Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaaki Furusawa
2. 発表標題 Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Boecherer's conjecture
3. 学会等名 CMO Workshop: Special Values of Automorphic L-functions and Associated p-adic L-Functions (18w5053) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 古澤昌秋
2. 発表標題 保型L函数の特種値の代数性について - 極私的総括 -
3. 学会等名 第62回代数シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 古澤昌秋
2. 発表標題 On special Bessel periods for $SO(2n+1)$
3. 学会等名 RIMS 研究集会「保型形式とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----