様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：３２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５０７１
研究課題名（和文）標準Whittaker加群の構造解析

研究課題名（英文）Analysis on the structure of standard Whittaker modules

研究代表者
谷口　健二（Taniguchi, Kenji）

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：２０３０６４９２
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：群の表現論において，ある標準的な表現を定義し，その構造を決定することは基本的な問題である．本研究では，研究代表者が定義した標準 Whittaker (g,K)-加群についてこの問題に取り組んだ．その成果は以下の通りである．(1) 群が Sp(2,R) のときの socle filtration を完全に決定した．(2) 群が split の場合について，パラメータを動かす translation という操作を行ったときの挙動を決定したほか，この加群の大域指標を決定した．
更に本研究の一つの主テーマであった自己双対性予想に取り組んだが，完全な証明には至らなかった．

研究成果の学術的意義や社会的意義
群や環の表現論において，標準的な表現を構成し，その構造解析を行うことは基本的かつ重要な問題である．本研究では，Whittaker 関数の空間という誘導表現から構成された標準 Whittaker (g,K)-加群に対して，この問題に取り組んだ．研究を続ける過程で，この加群はある圏における入射加群であることが認識され，この事実を使うことで，群が split の場合には，translation での安定性や大域指標の決定，即ち組成因子問題を解決することができた．当初は解析的な問題と思われていたが，全く異なる代数的な手法で研究が進展したことは興味深いと考えている．

研究成果の概要（英文）：In the representation theory of groups, it is one of the basic problems to define standard representations and determine the structure of them.
In this research, I worked on this problem about the standard Whittaker (g,K)- modules, which I had defined. The results are as follows.(1) The socle filtrations of the standard Whittaker (g, K) -modules of Sp(2,R) are completely determined. (2) In the case of split groups, I proved that these modules are stable under the translation functors and I determined the global characters of the standard Whittaker (g, K)-modules. I also tried to show the self duality conjecture, which is one of the main objects of this research. Though important observations are obtained, this conjecture is still unproved.

研究分野：リー群の表現論

キーワード：標準 Whittaker 加群　リー群の表現の組成列　Whittaker 模型　確定特異点型偏微分方程式系の境界値問題

様 式 C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

群の表現論において，標準的な表現を定義しその構造を解析することは，基本的かつ重要な問題である．例えば実簡約型 Lie 群の場合では，一般化した主系列表現の (g,K)-加群が標準的な加群の役割を果たし，その組成因子問題は Kazhdan-Lusztig-Vogan 予想と呼ばれ，Vogan によって解決された．

研究代表者は標準加群の Whittaker 模型版を定義し，これを標準 Whittaker (g,K)-加群と名付け，その基本的な性質を調べていた．その結果，無限小指標が generic な場合や，群 G が U(n,1), Spin(n,1), SL(3,R) で無限小指標が整数性を持つ場合について，標準 Whittaker (g, K)-加群の構造を決定していた．

２．研究の目的

このような背景を踏まえ，本研究では無限小指標が generic でないときの，一般の群 G の標準 Whittaker (g, K)-加群の組成列の構造，つまり socle filtration を決定することを目的とした．具体的には，以下の通りである．

まず，研究開始の段階では具体例が不足していたため，K-タイプの shift 作用素や確定特異点型微分方程式の境界値を使うことで，SL(3,R) 以外の実階数 2 の群，特に split 群である Sp(2,R) や G_2 について，標準 Whittaker (g, K)-加群の socle filtration を明示的に決定することを最初の目標とした．

この具体例から得られる情報も参考にして，一般の群に対して，標準 Whittaker (g, K)-加群の大域指標の決定，つまり組成因子問題の解決と，split 群の場合の自己共役性予想の証明に取り組む．その上でこの加群の socle filtration を完全に決定することを目標とした．

３．研究の方法

最初の課題であった具体例の構成については，群が U(n,1), Spin(n,1), SL(3,R) の場合に成功した手法を用いた．具体的には，標準 Whittaker (g, K)-加群を特徴付ける偏微分方程式系を書き下し，実階数 1 への還元を行うことで緩増加な Whittaker 関数を特定し，その上で K-タイプの shift 作用素により組成因子の上下を決定する手法を用いた．

この加群の大域指標の決定については，当初は K-タイプの重複度の評価を行うことで Kazhdan-Lusztig-Vogan 予想に帰着させる方針であったが，本研究の進展により，この加群が入射加群であることがわかったため，代数的な手法で取り組むように方針を変更した．また，その他の一般的な性質についても，入射性でわかることは徹底的に調べた．

標準 Whittaker (g,K)-加群の構造は，Jacquet 積分と呼ばれる主系列表現から Whittaker 加群への絡作用素が存在することからわかるように，主系列表現の構造と深い関係がある．これは実階数の低い群の場合の例でも確かめられた．そこで主系列表現の socle filtration を具体的に決定する研究も行った．

最後に残った split 群の場合の自己双対性予想については，上記のような代数的な手法と，確定特異点型微分方程式系の境界値問題という解析的な手法を組み合わせることで，非退化不変双一次形式を構成することを目標にして取り組んだ．

４．研究成果

(1)具体例の構成

上記「研究の方法」にある手法を使うことで，実階数２の split 群 Sp(2,R) の標準 Whittaker (g,K)-加群の socle filtration を完全に決定することができた．この結果を見ると，「群が split であるときは，標準 Whittaker (g,K)-加群は自己双対的な構造を持つ」という，本研究開始前から得ていた予想がこの場合についても正しいことが確かめられた．

(2) Whittaker 加群の入射性

(g,K)-加群 V に対し，その双対加群の Whittaker ベクトルのなす空間を取る関手は完全関手である．これを言い換えると，本研究の主題である Whittaker 加群は，固定した無限小指標を持つ Harish-Chandra (g,K)-加群のなす圏における入射加群であることがわかった．特に split 群の場合には，緩増加な Whittaker 関数の重複度１定理により，標準 Whittaker (g,K)-加群はこの圏における大きな表現の入射包絡であることがわかった．

(3) translation 関手に関する安定性

(2) で得られた結果を使うと，split 群の場合には，標準 Whittaker (g,K)-加群を translation 関手で移した場合，translation 関手の完全性により，その像も大きな表現の入射包絡であることがわかる．このことから標準 Whittaker (g,K)-加群の translation 関手に関する安定性，つまり標準 Whittaker (g,K)-加群を translation 関手で移したものは標準 Whittaker (g,K)-加群に同型であることが直ちに従うことがわかった．

(4) 標準 Whittaker (g,K)-加群の大域指標の決定

(2) で述べた入射性を使うことで，split 群の場合には，大域指標を決定することもできた．緩増加とは限らない Whittaker 関数全体のなす (g,K)-加群の大域指標は，split 群の場合には，松本久義氏による先行研究でわかっていた．この加群の入射性と，標準 Whittaker (g,K)-加群が大きな表現の入射包絡であること，および Whittaker 模型を持つ既約表現は大きな表現に限ること，またその重複度は Weyl 群の位数に等しいこと，といったよく知られた結果を組み合

わせることで，標準 Whittaker (g,K)-加群の大域指標を決定することができた．この結果により，split 群については，socle filtration の決定，あるいはその大きな部分を占める自己双対性予想の証明を除くことに関しては，ほぼ構造がわかった．

(5) split 群の場合の自己双対性予想

この予想は SL(2,R)，SL(3,R) の例から得られ，本研究の成果 (1) で Sp(2,R) の場合にも確かめられた．この予想の証明には，確定特異点型偏微分方程式の境界値を用いて非退化不変双一次形式を構成するのが良いと考え，SL(2,R) の場合にはその構成に成功した．しかし階数 2 以上の群の場合には，境界値写像はそのままでは絡作用素になるとは限らず，絡作用素になるようにうまく作れることを証明しなければならないことが研究の過程で認識された．この部分については本研究の終了までには解決しなかった．また，松本久義氏による先行研究の結果と (2) の入射性を組み合わせると，標準 Whittaker (g,K)-加群の既約商加群の中に大きな表現が含まれることがわかるが，これ以外に既約商加群が無いことが言えれば自己双対性予想が肯定的に解決されることが本研究でわかった．しかし本研究の期間中には，これを証明するまでには至らなかった．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名
谷口 健二

２．発表標題
緩増加な Whittaker 関数の空間の不変双一次形式について

３．学会等名
2019年度表現論ワークショップ

４．発表年
2020年

１．発表者名
谷口　健二

２．発表標題
Whittaker加群上の不変双一次形式について

３．学会等名
2018年度表現論ワークショップ

４．発表年
2019年

１．発表者名
谷口健二

２．発表標題
Whittaker 加群の代数的な性質について

３．学会等名
2017年度表現論ワークショップ

４．発表年
2018年

１．発表者名
谷口健二

２．発表標題
Whittaker 関数の空間の不変双一次形式について

３．学会等名
2016年度表現論ワークショップ

４．発表年
2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

谷口健二のホームページ　学術論文
http://www.gem.aoyama.ac.jp/~taniken/publications.html
谷口健二のホームページ　学術論文
http://www.gem.aoyama.ac.jp/~taniken/publications.html

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考