

令和元年6月15日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05078

研究課題名(和文) 尖点形式に由来するゼータ母関数族の構成

研究課題名(英文) Generating functions of the zeta-function derived from cusp forms

研究代表者

野田 工 (Noda, Takumi)

日本大学・工学部・教授

研究者番号：10350034

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：合流型超幾何級数を係数にもつゼータ関数について、Hankel路積分表示、解析接続、変換公式、Riemannゼータ関数の母関数表示等の基本性質を証明した。さらに関数関係式(Hurwitzゼータ型関数等式)を示した。正則Poincare級数を一重和に分解して現れるHurwitz-変形Lerch型ゼータ関数に対しても、Hankel路積分表示を与え、解析接続、関数関係式または変換公式等の基本性質を証明し報告した。応用としてPoincare級数のFourier級数展開、および指数関数型Riemannゼータ母関数に対するVoronoi型和公式の新しい証明を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の特色・独創的な点は、尖点形式に由来する新種のゼータ関数群を発見、援用することであり、尖点形式の多重化や一般Poincare級数などの具体的な積分表示・変換公式等の導出を目標する点に新規性がある。正則Poincare級数を一重和に分解して現れるHurwitz-変形Lerch型ゼータ関数に対してRiemannゼータ関数の類似であるHankel路積分表示を与えたことは本研究の正当性を示唆している。さらに合流型超幾何関数型ゼータ母関数にも同様の結果を得た。尖点形式に由来する数論的母関数の構成の一般化が期待され、ゼータ母関数群の理論に新機軸を打ち出す大きな意義を有すると考える。

研究成果の概要(英文)：We conducted research on a hypergeometric generating function of the Riemann zeta-function, and proved a Hankel-type integral representation which leads to an analytic continuation and transformation formula. Further, we showed the functional relation. We defined generalized exponential generating function of the Riemann zeta-function (the Hurwitz - modified Lerch zeta function) and proved a Hankel-type integral representation which leads to an analytic continuation and a functional relation or transformation formula. As an application, we obtained a new proof of the Fourier series expansion of the Poincare series and one Voronoi-type summation formula for the generating function of the Riemann zeta-function.

研究分野：代数学

キーワード：解析的整数論 多重アイゼンシュタイン級数 ゼータ母関数 尖点形式

1. 研究開始当初の背景

(1) 数論的関数の中で重要なゼータ関数(L-関数)には、解析接続、関数等式そして特殊値などを与えることが基本的な問題となる。特に零点分布に関して Hilbert と Pólya は独立に、「Riemann ゼータ関数の零点はある種の自己共役作用素の固有値と関係づけられることによりその性質が解明されるであろう」という作業仮説を立てた(1915年頃)。この研究指針について Selberg の先駆的結果、Montgomery, Dyson(1970年代)による錯乱行列の固有値分布との統計的類似などが知られている。固有値分布に対しては Selberg(1952年)や Kuznetsov(1983年)の跡公式といった強力な道具が知られているが、これらは保型形式の研究を基盤としている。保型 L-関数の零点に関して本報告者は、L-関数の零点と Hecke 固有値とを関連付ける明示公式を与えていた(引用文献[]、[])。保型形式に付随する L-関数には Rankin - Selberg method を通じて実解析的 Eisenstein 級数が関係し、L-関数の解析接続、極の位置、関数等式、特殊値などを求める際に大きな役割を果たす。本報告者は論文[]において、実解析的 Eisenstein 級数および、Fourier 係数の Laplace - Mellin 変換の値が零になることを示している。また、桂田昌紀氏[]が Epstein ゼータ関数および Laplace - Mellin 変換の完全漸近展開を与えた。これらの結果を基軸に本報告者と桂田昌紀氏は共同研究[]で、実解析的 Eisenstein 級数の上半平面虚軸方向に関する完全漸近展開を与えることに成功している。この漸近展開から固有関数等式、Fourier 級数展開、極の位置、Kronecker 極限公式、特殊値、Lambert 級数表示などの別証明が得られた。

(2) 多重 Eisenstein 級数：前記の研究は、近年盛んに研究されつつある多重ゼータ関数の枠組みの中で理解することが可能であり(松本耕二[]),保型形式への応用と見なせる。現在、多重 Eisenstein 級数の定式化を行い、多重ゼータ関数や多変数保型形式との関係、各種漸近展開、特殊値の明示公式等の解明が進行中である。また、空力干渉計算に現れる諸関数と多重 Eisenstein 級数等との相互関係、数学的枠組みの提示も課題としている[]、[]。

(3) Poincaré 級数に由来する J-Bessel ゼータ関数：多重 Eisenstein 級数の研究における手法を尖点形式に拡張する過程において、本申請者は逆 Mellin 変換されたモジュラー群上の Poincaré 級数の Fourier 級数の内部に新種のゼータ関数が存在することを看取した。このゼータ関数(J-Bessel ゼータ関数)について Hankel 路積分表示を与え、解析接続、Hurwitz ゼータ型の関数等式、Riemann ゼータ関数の母関数表示等の基本性質を証明した。さらに系として Poincaré 級数の Fourier 級数展開の新しい証明を与えた[]。

2. 研究の目的

(1) 保型形式、特に尖点形式に含有される Dirichlet 級数を抽出し、Bromwich 積分を経由した積分表示を与える。積分表示から解析接続、関数関係式、特殊値などの基本性質と Riemann ゼータ関数等の母関数表示を導く。さらに一般 Poincaré 級数の構成と諸性質の解明を目指す。

(2) 上記の尖点形式に由来するゼータ関数を、超幾何関数類を係数にもつ場合に拡張し、一般化された Selberg クラスの非線形 twist 元の具体例を与える。積分表示、関数関係式を用いてゼータ母関数群と Voronoi 型和公式の新しい構成方法を提示する。

3. 研究の方法

(1) 多重 Eisenstein 級数で用いられる Mellin - Barnes 積分変換の手法をモジュラー群上の Poincaré 級数を含む尖点形式に適用する。Hurwitz - 変形 Lerch 型ゼータ関数の解析的諸性質を Fourier - Mellin 積分表示経由で導き、得られた関数関係式から Voronoi 型和公式を導く。同時に J-Bessel ・合流型超幾何ゼータ関数の特殊値の明示公式を与える。

Poincaré 級数を含む尖点形式への拡張には、Hankel 路積分表示に誘導する Fourier - Mellin 積分表示を得ておくことが技術的な出発点となる。この点について特殊関数を含む Mellin 積分変換対を調査し、より一般の特殊関数(超幾何関数等)への拡張を視野に入れながら計算を進める。さらに特殊値の記述には Bernoulli 数の一般化が技術的な大きな課題となる。また Voronoi 型和公式の証明において、一般には緻密な収束性等に配慮する必要があるが、指数型母関数に関しては近年の結果が参照できる。具体的には以下の各項目について対応していく。

Fourier - Mellin 積分表示：J-Bessel ゼータ関数の積分表示の鍵となるのは Weber の第一指数型積分表示の逆変換であった[]。変形 Hurwitz - Lerch 型ゼータ関数に対する Fourier - Mellin 積分表示を、各項の適切な逆 Laplace 変換表示を見出すことにより導く。特に特殊関数の Barnes 型積分表示を Fourier - Mellin 積分に適用する。

Hankel 路の移動：関数関係式は Hankel 路積分表示をシフトとし、極における留数の総和をとることによって得られる。しかし Poincaré 級数に由来する Hurwitz 型ゼータ関数の極の位置が実軸上に分布することが観測されるため、適切な積分路にあらかじめ移動しておく必要が生じる。被積分関数のガンマ因子の挙動に留意しつつ、積分路を発散させる。

Voronoi 型和公式：指数関数型 Riemann ゼータ母関数についての Voronoi 型和公式は 1960 年代から研究対象となっており参照可能である。国内外の研究者のアドバイスをを受けながら関数関係式を和公式に移行する。

(2) 超幾何関数群を係数にもつ Dirichlet 級数に対して Hankel 路積分表示を与えて関数関係式やゼータ母関数表示等を示す。この手法を用いて一般 Poincaré 級数の変換公式、ゼータ母関数群を構成する。

特殊関数の逆 Laplace 変換：出発点の関数関係式を得る最も簡易な手法は、既知の特殊関数と単項の積の Laplace 変換の適用である。逆変換が Bromwich 積分表示され、それを Hankel 路積分にシフトできれば、これまでと同様の手法でゼータ関数の積分表示と関数関係式が提示できる。Laplace 変換が未知の場合、特殊関数の Barnes 型積分表示を手掛かりに逆変換を求める。

ゼータ母関数表示：母関数表示を得る技術的な条件として、元の特殊関数またはその Laplace 変換の対の関数が何らかの級数展開を持つ必要がある。特に対関数の級数表示から母関数を得るには、さらにゼータ関数の積分表示を経由する必要がある。

4. 研究成果

(1) 本報告者は逆 Mellin 変換されたモジュラー群上の Poincaré 級数の Fourier 級数の内部に新種のゼータ関数 (J-Bessel ゼータ関数) を見出し、Hankel 路積分表示、解析接続、変換公式、Riemann ゼータ関数の母関数表示等の基本性質を証明していた。さらに類似の手法を用いて、合流型超幾何型ゼータ関数についても積分表示等の同様の性質を得ていた。さらに、これらのゼータ関数と、桂田昌紀氏 (1997 年) によって定義されていた超幾何関数型のゼータ母関数との間に成り立つ関数関係式 (Hurwitz ゼータ型関数等式) を示した。上記の J-Bessel ゼータ関数について非正整数点における特殊値を、Bernoulli 数を用いた級数表示で与えた。

(2) 合流型超幾何級数を係数にもつゼータ関数について、Hankel 路積分表示、解析接続、変換公式、Riemann ゼータ関数の母関数表示等の基本性質を証明した。さらに関数関係式 (Hurwitz ゼータ型関数等式) を示した。正則 Poincaré 級数を一重和に分解して現れる Hurwitz - 変形 Lerch 型ゼータ関数に対しても、Hankel 路積分表示を与え、解析接続、関数関係式または変換公式等の基本性質を証明し報告した。応用として Poincaré 級数の Fourier 級数展開、および指数関数型 Riemann ゼータ母関数に対する Voronoi 型和公式の新しい証明を示した。

(3) Kaczorowski と Perelli [,] は拡張された (関数等式を仮定しない) Selberg クラスの研究において非線形 twist の Dirichle 級数を導入し解析接続を示した。本報告者の定義した J-Bessel ゼータ関数、および合流型超幾何ゼータ関数は Kaczorowski と Perelli のクラスに含まれる積分表示と関数関係式をもつ具体例であり、Riemann ゼータ関数の母関数にもなっている。このことについて Kaczorowski - Perelli 各氏と本申請者は相互補完を確認している。

(4) 正則 Poincaré 級数を一重和に分解して現れる Hurwitz - 変形 Lerch 型ゼータ関数に対し、Hankel 路積分表示を与え、解析接続、Hurwitz ゼータ型の関数等式、Riemann ゼータ関数の母関数表示等の基本性質を証明した。応用として Poincaré 級数の Fourier 級数展開、および指数関数型 Riemann ゼータ母関数に対する Voronoi 型和公式の新しい証明が従う。非正則 Poincaré 級数についても同様な考察を行い、ある種の非正則 Poincaré 級数を一重和に分解して現れる Hurwitz - 変形 Lerch 型ゼータ関数について Fourier 級数展開とみなせる積分表示を与えた。証明においてはこれまでに得られた結果と同様に、各項の適切な逆 Laplace 変換表示からスタートする。ただし級数の処理は単純ではなく我々の場合についてテータ変換公式を用いている。

< 引用文献 >

Kaczorowski and Perelli, *Twists and resonance of L-functions, I*, J. Eur. Math. Soc. 18 (2016), 1349--1389.

Kaczorowski and Perelli, *A note on Bessel twists of L-functions*, Analytic Number Theory, In Honor of Helmut Maier's 60th Birthday, Ed. C. Pomerance and M. T. Rassias, Springer, 2015.

Kaczorowski and Perelli, *On the structure of the Selberg class, VI: non-linear twists*, Acta Arithmetica, 116, (2005), 315-341.

- Katsurada, *Complete asymptotic expansions associated with Epstein zeta-functions*, Ramanujan J. Vol. 14. 2. (2007), 249-275.
- Katsurada and Noda, *Differential actions on the asymptotic expansions of non-holomorphic Eisenstein series*, International J. N. T. 6, Vol. 5 (2009), 1061-1088.
- Matsumoto, *Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series*, Nagoya Math. J. 172, (2003), 59-102.
- Noda, *On the functional properties of the Bessel zeta-function*, Acta Arithmetica, 171 (2015),
- Noda, *A transformation formula for a certain Eisenstein series in aerodynamic interference calculations*, Journal of Math-for-Industry, Vol. 5 (2013), 135-138.
- Noda, *A transformation formula for a certain Eisenstein series in aerodynamic interference calculations*, アメリカ数学会 Fall East. Sec. Temple Univ. Philadelphia, PA, USA, (2013) 10月12日 (学会講演)
- Noda, *An explicit formula for the zeros of the Rankin-Selberg L-function via the projection of C -modular forms*, Kodai Math. Journal 31, No.1 (2008), 120-132.
- Noda, *A note on the non-holomorphic Eisenstein series*, The Ramanujan Journal 14 (2007), 405-410.
- Noda, *On the zeros of symmetric square L-functions*, Kodai Math. J. 22, No.1 (1999), 66-82.
- Noda, *An application of the projections of C automorphic forms*, Acta Arithmetica, 72, No.3 (1995), 229-234.

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4 件)

- T. Noda, *Some generating functions of the Riemann zeta function*, Proceedings of the Number Theory Week 2017, The Banach Center Publications, to appear 査読有
- M. Katsurada and T. Noda, *Transformation formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two complex variables*, The Ramanujan Journal, Vol. 44, (2017), 237--280. DOI: 10.1007/s11139-017-9922-5 査読有
- T. Noda, *On the functional properties of the confluent hypergeometric zeta-function*, The Ramanujan Journal, Volume 41, (2016), 183-190, DOI: 10.1007/s11139-014-9613-4 査読有
- M. Katsurada and T. Noda, *Transformation formulae and asymptotic expansions for double holomorphic Eisenstein series of two complex variables (summarized version)*, RIMS Kokyuroku (Analytic Number Theory) 2013 (2016), 157-169. 査読有

[学会発表] (計 8 件)

- 野田 工, 非正則・指数型 Riemann ゼータ母関数の積分表示, 日本大学工学部学術研究報告会, 2018年12月8日
- 野田 工, 指数型 Riemann ゼータ母関数について, 京都大学数理解析研究所 研究集會 解析的整数論, 2018年10月31日
- 野田 工, 指数型ゼータ母関数と Voronoï 型和公式, 日本大学工学部学術研究報告会, 2017年12月9日
- 野田 工, モジュラー群上の Poincaré 級数に関する Riemann ゼータ関数の母関数について, 早稲田大学整数論セミナー, 早稲田大学, 2017年10月27日
- 野田 工, *On some generating functions of the Riemann zeta function*, 研究集會 Number Theory Week 2017, Faculty of Mathematics and Computer Science of Adam Mickiewicz University, Poznań, Poland, 2017年9月7日

野田 工, *Special values of some generating functions of the Riemann zeta function*,
研究集会 Diophantine Analysis and Related Fields, 日本大学理工学部, 2017 年 1 月
8 日

野田 工, 指数型ゼータ母関数の一般化と応用, 日本大学工学部学術研究報告, 2016 年 12
月 3 日

野田 工, *Two zeta functions contained in the Poincaré series*, 京都大学数理解析研
究所 研究集会 解析的整数論, 2016 年 11 月 2 日

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ge.ce.nihon-u.ac.jp/~takumi/index.html>

6 . 研究組織

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。