3版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　 ５ 月 ２６ 日現在

機関番号：３２６６５

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2020

課題番号：１６K０５０７９

研究課題名（和文）楕円曲線の族に伴う不定方程式の明示解

研究課題名（英文）Explicit solutions to Diophantine equations attached to families of elliptic curves

研究代表者

藤田　育嗣（FUJITA, Yasutsugu）

日本大学・生産工学部・教授

研究者番号：５０５１４１６３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：２つの元をかけて1を加えたものが平方数になるような異なるm個の正整数からなる集合をディオファンタスのm組という．本研究では，任意のディオファンタスの4組は正則であるという未解決予想を支持するいくつかの結果を得た．例えば，ディオファンタスの3組{a,b,c}(a<b<c)に対し{a,b,c,d}(c<d)が正則でないディオファンタスの4組となるdは高々7個しかないことを示した．ディオファンタスの4組は楕円曲線とよばれる群構造をもつ曲線と密接に関係しているが，本研究ではある楕円曲線の族について，整数点（座標が整数である点）や群としての生成元についても具体的に調べた．

研究成果の学術的意義や社会的意義

任意のディオファンタスの4組は正則であると予想されており，様々な傍証はあるが，一般には正則でないディオファンタスの4組の有限性さえ示されていない．ディオファンタスの3組{a,b,c}(a<b<c)を固定してはいるが，{a,b,c,d}(c<d)が正則でないディオファンタスの4組であるようなdの個数の具体的な上限が得られた意義は大きい．一般に，与えられた１つの楕円曲線の整数点や群としての生成元を求めることは困難である．ここでは例えば u＾2-v＾4=m（mは0でない整数）で定義される楕円曲線の族について，階数が1または2の場合に整数点や生成元を具体的に決定した．

研究成果の概要（英文）：A set of m distinct positive integers is called a Diophantine m-tuple if the product of any two elements in the set increased by 1 is a perfect square. In this study, we obtain some results supporting the open conjecture asserting that any Diophantine quadruple is regular. For example, we showed that for a Diophantine triple {a,b,c} (a<b<c) the number of d's such that {a, b,c,d} (c<d) is a irregular Diophantine quadruple is at most 7.
Diophantine quadruples are closely related to elliptic curves, which are certain curves having group structures. This study also explicitly examined integral points (that is, points with integer coordinates) and generators as groups on certain families of elliptic curves.

研究分野：整数論，特に，不定方程式論

キーワード：ディオファンタスのm組　楕円曲線のMordell-Weil群

様 式 C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

整数係数の方程式で定義された楕円曲線 E の有理点のなす群 （Mordell-Weil 群）$E(\mathbb{Q})$ は Mordell の定理より有限生成アーベル群であり，そのねじれ部分群を決定することは容易であるが，自由部分群を調べることは一般には容易ではない．また，Siegel の定理よりE の整数点は高々有限個であり，Baker によって整数点の個数の上限が明示的に与えられているが，その上限は非常に大きく，整数点を決定することはやはり一般には容易ではない．

(1) Brown, Myers (Elliptic Curves from Mordell To Diophantus and Back, Amer. Math. Monthly 109 (2002), 639-649) **は，多くの整数点をもつ楕円曲線** $E{:}\,y^2 = x^3 - x + n^2$ **について，**$n \geq 2$ **ならばその** $\mathbb{Q}$ **上の階数は** 2 **以上であることを示し，また楕円曲線** $y^2 = x^3 - m^2x + 1$ **についても同様の結果を示唆した．その後これらの曲線について階数の高い部分族を見つける等の研究はあるが（例えば，**P.Tadic, On the family of elliptic curves $y^2 = x^3 - T^2x + 1$, Glas. Mat. Ser. III 47(2012)81-93; P.Tadic, The rank of certain subfamilies of the elliptic curve $y^2 = x^3 - x + T^2$, Ann.Math.Inform.40(2012)145-153 **参照)，**Mordell-Weil **群の生成元を求めるといった研究は見られない．**

(2) Fermat **の** 3 **次式の** 3 **次** twist $x^3 + y^3 = m$ **（**m **は** 3 **乗因子をもたない整数）で定義される楕円曲線** C_m **は楕円曲線** $E^m : y^2 = x^3 - 432m^2$ **と双有理同値であるが，研究代表者は奈良忠央氏とともに，**E^m **上の標準的高さを評価することにより**rank $C_m(\mathbb{Q}) = 1, 2$ **の場合に** C_m **の生成元および整数点を決定した（**Y.Fujita,T.Nara, Generators and integral points on twists of the Fermat cubic,Acta Arith.168(2015)1-16).

(3) **正整数** m **に対し，異なる** m **個の正整数の集合** $\{a_1, \ldots, a_m\}$ **は，すべての** $i < j$ **に対し** $a_i\ a_j + 1$ **が平方数であるとき ディオファンタスの** m **組 とよばれる．古くから「ディオファンタスの** 5 **組は存在しない」という予想およびさらに強い予想「すべてのディオファンタスの** 4 **組は正則である」がある．ここで，ディオファンタスの** 4 **組** $\{a, b, c, d\}$ $(a < b < c < d)$ **が正則であるとは，**$r = \sqrt{ab+1},\ s = \sqrt{ac+1},\ t = \sqrt{bc+1}$ **とするとき，**$d = a + b + c + 2abc + 2rst$ **が成り立つことである．いずれの予想も未解決であった．この後者の予想を支持する様々な結果があり，例えば，**$\{k-1, k+1\}$ **(**$k > 1$ **は整数) や** $\{F_{2n}, F_{2n+2}\}$ **(**F_n **は** n **次フィボナッチ数) はいつもディオファンタスの** 2 **組をなすが，これらを含むディオファンタスの** 4 **組は正則なものしかないことが知られている（**Y.Fujita, The extensibility of Diophantine pairs $\{k-1, k+1\}$, J. Number Theory 128(2008)322-353; Y.Bugeaud, A.Dujella, M.Mignotte, On the family of Diophantine triples $\{k-1, k+1, 16k^3 - 4k\}$,Glasg.Math.J.49(2007)333-344; A.Filipin, Y.Fujita, A.Togbé,: The extendibility of Diophantine pairs II: examples. J. Number Theory 145(2014)604-631）**．また，**$\{k, A^2k + 2A, (A+1)^2k + 2(A+1)\}$ **(**k, A **は正整数) を含むディオファンタスの** 4 **組については，**k **や** A **に関する条件付きでその正則性は知られているが，すべての正整数** k, A **に対して正則性が成り立つことは知られていなかった．**

２．研究の目的

(1) $m = 1$ **および** $n = 1$ **の場合に，楕円曲線** $E{:}\,y^2 = x^3 - mx + n^2$ **の「判別式が**2, 3 **べき以外の平方因子をもたない」かつ** rank $E(\mathbb{Q}) = 1$ **または** rank $E(\mathbb{Q}) = 2$ **という仮定の下に，**E **の** $\mathbb{Q}$ **上の生成元を決定する．**

(2) しかるべき条件（$\alpha = \beta = \gamma = 1$ の場合を含むもの）を満たす整数 α, β, γ に対し，曲線 $(x + \alpha y)(x^2 - \beta xy + \gamma y^2) = m$ の整数点を，対応する楕円曲線の階数が 2 等の仮定の下に決定する．
(3) 任意に固定したディオファンタスの 3 組 $\{a, b, c\}$ $(a < b < c)$ に対し，$\{a, b, c, d\}$ が正則でないディオファンタスの 4 組であるような d $(d > c)$ の個数の上限を求める．
また，$\{k, A^2k + 2A, (A + 1)^2k + 2(A + 1)\}$ を含むディオファンタスの 4 組は正則であることを示す．

３．研究の方法

(1) $m = 1$ および $n = 1$ の場合に，楕円曲線 $E: y^2 = x^3 - mx + n^2$ 上の有理点の標準的高さ (canonical heights) を局所的高さ (local heights) のを利用して精密に計算した．その際に,「判別式が2, 3 べき以外の平方因子をもたない」および rank $E(\mathbb{Q}) = 1$ または rank $E(\mathbb{Q}) = 2$ という条件を要した．
(2) 曲線 $(x + \alpha y)(x^2 - \beta xy + \gamma y^2) = m$ について，想定していたよりも状況が複雑で，思うような成果を得ることが難しいことが分かった．そこで，代わりに 4 次曲線 $u^2 - v^4 = m$ および $u^2 + v^4 = m$ （m は 4 乗因子をもたない整数）について，標準的高さを精密に計算した．
(3) ディオファンタスの 3 組 $\{a, b, c\}$ に対し，正則でない 4 組 $\{a, b, c, d\}$ の存在を調べることは連立ペル方程式 $az^2 - cx^2 = a - c$, $bz^2 - cy^2 = b - c$ の解を調べることに帰着される．この連立ペル方程式を解くために，パデ近似に基づく連立有理数近似と，２つの対数および３つの対数の 1 次形式に関する Baker の方法を組み合わせることにより，そのような 4 組の個数を評価した．また，$\{k, A^2k + 2A, (A + 1)^2k + 2(A + 1)\}$ を含むディオファンタスの 4 組に関しては，パデ近似法をより精密に適用することにより，非常によい評価が得られた．

４．研究成果

(1) $m = 1$ および $n = 1$ の場合に，楕円曲線 $E: y^2 = x^3 - mx + n^2$ の「判別式が2, 3 べき以外の平方因子をもたない」かつ rank $E(\mathbb{Q}) = 1$ または rank $E(\mathbb{Q}) = 2$ という仮定の下に，E の $\mathbb{Q}$ 上の生成元を決定することができ，まとめた論文（奈良忠央氏との共著）は Publicationes Mathematicae Debrecen に掲載された．
(2) 4 次曲線 $u^2 - v^4 = m$ および $u^2 + v^4 = m$ （m は 4 乗因子をもたない整数）について，その生成元や整数点を調べた．例えば，m は平方因子をもたない整数とし，楕円曲線 C_m : $u^2 - v^4 = m$ の $\mathbb{Q}$ 上の階数が 2 であるとき，C_m の整数点は高々 8 個であることを証明した．まとめた論文は，Glasnik Matematicki に掲載された．
(3) 任意に固定したディオファンタスの 3 組 $\{a, b, c\}$ $(a < b < c)$ に対し，$\{a, b, c, d\}$ が正則でないディオファンタスの 4 組であるような d $(d > c)$ の個数は高々 10 個であることを証明し，まとめた論文（宮崎隆史氏との共著）は Transactions of the American Mathematical Society に掲載された．さらにこの個数の上限 10 を 7 に改善した結果をまとめた論文（Mihai Cipu 氏，宮崎隆史氏との共著）が International Journal of Number Theory に掲載された．
また，$\{k, A^2k + 2A, (A + 1)^2k + 2(A + 1)\}$ を含むディオファンタスの 4 組は正則であることを完全に証明することができ，まとめた論文（Mihai Cipu 氏，Maurice Mignotte 氏との共著）は Science China Mathematics に掲載された．
当初の予定にはなかった研究であるが，ディオファンタスの 4 組は正則であるという予想に関連して，フィボナッチ数からなるディオファンタスの 4 組について調べ，それらは高々有限個し

か存在しないことを Florian Luca 氏と共に証明した．まとめた論文は Glasnik Matematicki に掲載された．さらに，その後，フィボナッチ数からなるディオファンタスの 4 組は存在しないことを同じく Florian Luca 氏と共に証明することができ，まとめた論文が Acta Arithmetica に掲載された．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計14件（うち査読付論文　13件／うち国際共著　8件／うちオープンアクセス　2件）

1．著者名	4．巻
Mihai Cipu, Andrej Dujella and Yasutsugu Fujita	82
2．論文標題	5．発行年
Diophantine triples with largest two elements in common	2021年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Periodica Mathematica Hungarica	56-68
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s10998-020-00331-4	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	該当する

1．著者名	4．巻
Yasutsugu Fujita and Maohua Le	44
2．論文標題	5．発行年
Uniqueness of Solutions to Simultaneous Pell Equations	2021年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society	393-405
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s40840-020-00959-y	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	該当する

1．著者名	4．巻
Yasutsugu Fujita and Nobuhiro Terai	162
2．論文標題	5．発行年
On The Generalized Ramanujan-Nagell Equation x^2+(2c－1)^m=c^n	2020年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Acta Mathematica Hungarica	518-526
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1007/s10474-020-01085-8	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	－

1．著者名	4．巻
Mihai Cipu, Alan Filipin and Yasutsugu Fujita	210
2．論文標題	5．発行年
Diophantine pairs that induce certain Diophantine triples	2020年
3．雑誌名	6．最初と最後の頁
Journal of Number Theory	433-475
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）	査読の有無
10.1016/j.jnt.2019.09.019	有
オープンアクセス	国際共著
オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	該当する

1．著者名 Mihai Cipu, Alan Filipin and Yasutsugu Fujita	4．巻 43
2．論文標題 An Infinite Two-Parameter Family of Diophantine Triples	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society	6．最初と最後の頁 481-498
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40840-018-0695-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Yasutsugu Fujita and Tadahisa Nara	4．巻 54
2．論文標題 Generators and integral points on certain quartic curves	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Glasnik Matematicki Series III	6．最初と最後の頁 321-343
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3336/gm.54.2.04	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Yasutsugu Fujita and Florian Luca	4．巻 185
2．論文標題 There are no Diophantine quadruples of Fibonacci numbers	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Acta Arithmetica	6．最初と最後の頁 19-39
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/aa170613-8-12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Yasutsugu Fujita and Takafumi Miyazaki	4．巻 370
2．論文標題 The regularity of Diophantine quadruples	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6．最初と最後の頁 3803-3831
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/7069	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Mihai Cipu, Yasutsugu Fujita and Takafumi Miyazaki	4．巻 14
2．論文標題 On the number of extensions of a Diophantine triple	5．発行年 2018年
3．雑誌名 International Journal of Number Theory	6．最初と最後の頁 899-917
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S1793042118500549	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Mihai Cipu, Yasutsugu Fujita and Maurice Mignotte	4．巻 61
2．論文標題 Two-parameter families of uniquely extendable Diophantine triples	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Science China Mathematics	6．最初と最後の頁 421-438
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11425-015-0638-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Yasutsugu Fujita and Tadahisa Nara	4．巻 92
2．論文標題 The Mordell--Weil bases for the elliptic curve of the form y^2=x^3-m^2x+n^2	5．発行年 2018年
3．雑誌名 Publicationes Mathematicae Debrecen	6．最初と最後の頁 79-99
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5486/PMD.2018.7719	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Yasutsugu Fujita and Florian Luca	4．巻 52
2．論文標題 On Diophantine quadruples of Fibonacci numbers	5．発行年 2017年
3．雑誌名 Glasnik Matematicki Series III	6．最初と最後の頁 221-234
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3336/gm.52.2.02	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 藤田育嗣	4．巻 50
2．論文標題 ディオファントスのm組に関する最近の進展	5．発行年 2017年
3．雑誌名 日本大学生産工学部研究報告A	6．最初と最後の頁 71-74
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 藤田育嗣，宮崎隆史	4．巻 -
2．論文標題 Diophantus の3 組の4 組への拡張可能性	5．発行年 2017年
3．雑誌名 RIMS 研究集会報告集	6．最初と最後の頁 111-123
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 藤田育嗣
2．発表標題 非正則なディオファンタスの 4 組の個数の評価
3．学会等名 2020大分整数論研究集会
4．発表年 2020年

1．発表者名 Yasutsugu Fujita
2．発表標題 The regularity of extensions of Diophantine triples or pairs
3．学会等名 Representation Theory XVI（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

１．発表者名
Yasutsugu Fujita

２．発表標題
Non-existence of Diophantine quadruples consisting of Fibonacci numbers

３．学会等名
Diophantine Analysis and Related Fields 2019

４．発表年
2019年

１．発表者名
Yasutsugu Fujita

２．発表標題
Simultaneous Diophantine triples and quadruples

３．学会等名
Conference on Diophantine m-tuples and Related Problems II（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Yasutsugu Fujita

２．発表標題
Bounds for irregular Diophantine quadruples

３．学会等名
Diophantine Analysis and Related Fields 2017

４．発表年
2017年

１．発表者名
Yasutsugu Fujita

２．発表標題
The unique extensions of two parametric families of Diophantine triples

３．学会等名
Problems and prospects in Analytic Number Theory

４．発表年
2016年

〔図書〕　計1件

1．著者名 門田慎也 他　（藤田育嗣 編）	4．発行年 2018年
2．出版社 数理解析研究所	5．総ページ数 225
3．書名 解析的整数論とその周辺 数理解析研究所講究録 1813	

〔産業財産権〕

〔その他〕

2017年度RIMS共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」
https://sites.google.com/a/nihon-u.ac.jp/yasutsugu-fujita-s-homepage/2017nian-durims-yan-jiu-ji-hui-jie-xi-de-zheng-shu-luntosono-zhou-bian

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
RIMS Workshop 2017 "Analytic Number Theory and Related Areas"	2017年～2017年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関