

令和元年6月11日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05082

研究課題名(和文) Abel 函数論の基本函数 の熱方程式による特徴付けと一般加法公式の研究

研究課題名(英文) Research on characterization of the fundamental function sigma in the theory of Abelian functions via heat equations and general addition formulae

研究代表者

大西 良博 (Yoshihiro, Onishi)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：60250643

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 高種数の曲線に対する 函数の原点での冪級数展開の Hurwitz 整性についての完全な結果を詳細を査読付き学術誌に発表した。(2) 熱方程式による 函数の特徴付けを J.C.Eilbeck 氏, J. Gibbons 氏, 安田正大氏との共著として投稿した。発表時に使用した slide を Web page に公開した。(3) Gauss 数体の量指標 Hecke の L 函数の楕円 Gauss 和表示で, 対応する楕円函数の係数について Kummer 型の合同式の成立が, 値の消滅のために必要十分であることを突き止めた。(4) いくつかの研究集会で招待講演として発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本計画で得られた Abel 函数論の結果は, 伝統的な理論を深めるものであり, 楕円函数論がさうであつた様に, 数論に限らず, 様々な分野の数学で応用される様になるであらう。また, 楕円 Gauss 和に関する結果は, additive reduction の場合の p-adic L-functions の研究に示唆を与へる可能性がある。さうでなくとも, Birch Swinnerton-Dyer 予想の意味することの広がりを実感するには, 身近な良い材料になると思ふ。

研究成果の概要(英文)：(1) The researcher got the Hurwitz integrality of the power series expansion, at the origin, of the sigma function attached to a higher genus curve. The result is published as a paper on Proceedings of Edinburgh Mathematical Society. (2) The researcher and coworkers, J.C. Eilbeck, J. Gibbons, and S. Yasuda, investigated the heat equations for multi-variate sigma functions and get explicit recursion formulae as well as precise formulation of the Buchstaber-Leykin theory on such heat equations. The result is submitted. (3) Investigated on elliptic Gauss sum expression of the Hecke L-values at 1, the researcher found the equivalence of vanishing and validity of Kummer-type congruence for the corresponding coefficients. The researcher gave several talk in the conferences, RIMS conference "Mathematical structure observed from theory of Integral systems and its applications", The 23rd Number theory conference at Waseda University", and twice of Aichi Number theory Seminar".

研究分野：Abelian functions, Number theory

キーワード：Abelian function sigma function elliptic Gauss sums Hecke L-series

1. 研究開始当初の背景

本研究代表者（筆者）は Weierstrass, Riemann に始まり Klein や H.F. Baker の研究を経て積み重ねられてきた Abel 函数論の伝統的な研究をさらに深めるため、海外の研究者を交へて、Abel 函数の具体的な扱ひを主眼に長年、研究を重ねてきた。近年では、特に Buchstaber と Leykin の貢献が目覚しいが、本研究の代表者も含めて日本の研究者も大いに貢献してきた。その結果、種数が 2 以上の代数曲線のある大きな族 (plane telescopic curves) やそれらの Jacobi 多様体について、精密に計算できる理論をほぼ構築できたと自負してゐる。

これまでに、筆者が関係したもので、論文発表まで完了したものは以下の 3 項目にまとめられる。

- (1) Jacobi 多様体の階層化を込めた一般加法公式.
- (2) 種数が高い場合に拡張された Bernoulli-Hurwitz 数.
- (3) 種数が高い場合に拡張された Weierstrass の \wp 函数の間の関係式を求めること.

一方、これ以外の研究で進行中もの

- (4) σ 函数の原点での冪級数展開の Hurwitz 整性.
- (5) σ 函数の熱方程式による特徴付け. 特に先頭の定数つまり判別式の $1/8$ の意味を見出すこと.
- (6) 上記 (1) の発展がその後、見付かり、その研究.
- (7) Coble の定理の実現.

などがある。このうち (4) と (5) は本補助金を利用した前回の研究 (2013 年度 ~ 2015 年度) でかなりの部分ができてゐたものの、最後の詰めのところでは予想以上に時間が掛かり最終的な精査はできずに残つてゐた。一方、(6) と (7) は現在も進行中である。

2. 研究の目的

- (1) 文献表.

始めに基本的な文献を挙げる:

- [W] Weierstrass, K.: *Zur Theorie der elliptischen Functionen*, Königl. Akademie der Wissenschaften 27 (1882), (Werke II, pp.245-255).
- [FS] Frobenius, G.F. and Stickelberger, L.: *Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*, J. reine angew. Math. 92 (1882), 311-327.
- [BL] Buchstaber, V.M. and Leykin, D.V.: *Solution of the problem of differentiation of Abelian functions over parameters for families of (n, s) -curves*, Functional Analysis and Its Applications, 42 (2008), 268-278.

- (2) 研究対象について.

Weierstrass の函数 $\wp(u) = -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma(u)$ は

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$$

なる微分方程式を満たす。彼は [W] において、この微分方程式を $\sigma(u)$ の $\mathbb{Q}[g_2, g_3]$ 上の微分方程式とみなし、非常なる洞察力で $\sigma(u)$ の (原点における) (熱方程式と呼ばれる) 微分方程式を与へた。これは $\sigma(u)$ を特徴づけるものであり、原点での冪級数展開の係数に関する漸化式を与へる。

彼は 2 分点でも同様な考察をしてゐて、こちらの高種数の場合は今後の課題である。

[BL] はこれを modality 0 なる高い種数の代数曲線に対して一般化した。ここで modality の説明はしないが 1 次元の de Rham cohomology の基底を、曲線の方程式の次数と比較して、割と低いものである場合は 0 になる。具体的には、楕円曲線や超楕円曲線はどれも modality が 0 であり、これ以外に modality 0 の平面 telescopic 曲線は、(3, 4) 曲線、(3, 5) 曲線しかない。

さて、Buchstaber と Leykin は論文 [BL] を始めとするいくつかの論文で上記の Weierstrass の結果を見事に一般の曲線へ拡張する方法を公表した。[BL] は専門家でもかなり読みづらいが、彼らは、数学的な厳密さを突き抜けた大きな発見をしたのである。

彼らの論文を精査し、整理すること自体が重要な仕事であるため、筆者と共同研究者は、今回の研究でそれを行つた。

さらに [BL] には記述のない non-Weierstrass form で定義された曲線の場合についても考察を行つた。

(3) 本研究の具体的な目標とその意義.

① Hurwitz 整性. σ 函数の原点における冪級数展開は Hurwitz 整性と呼ばれる良い性質を持つことが観測されてゐる. これは, Hurwitz 型と呼ばれる展開の係数が整数 (曲線の定義方程式の係数の整式) になることを意味する. 但し, 2 の冪のみが分母に現れることがあり, これに関する部分が前回の研究で未完であつたので, これにきちんと定式化して証明を付けることを目標とした.

② σ 函数の展開係数の漸化式を σ の満たす熱方程式から得ること. Weierstrass は 1882 年の論文で種数 1 の場合に彼自身の σ 函数と, 定義方程式の係数に関する線形微分方程式を得て, それが展開係数の漸化式を与えることを示してゐる. Buchstaber-Leykin ([BL2008]) は, これを平面 telescopic 曲線に一般化した. Weierstrass は ρ の満たす微分方程式から始めて, 器用に σ の微分方程式を得てゐるが, この方法を種数が高い場合に行ふことは不可能といつてよい. Frobenius-Stickelberger は Weierstrass の発表と同じ年に別の方法で同じ結果を得てゐるが, 恐らくこれを hint に BL2008 では, 1 次 de Rham cohomology を symplectic 基底つき, 微分加群 (微分は曲線の座標と係数の双方に関するもの) とみて調べることで美しく一般化されたものになつてゐる. 但し, それは今だからこを言へることであつて [BL2008] は非常に読みづらい論文であるのと, 解空間が σ で生成される 1 次元だけかどうかは, 我々には証明を再現できなかつた. そこで, 今回はこの 1 次元性について, 詳しく調べることにした. 前回の研究では, ほぼ [BL] を読み解き, 論文にまとめる最初の段階で終了してゐた. 今回は, 細部の精査を行ひ, 論文を完成させて, 出版することが目標においた.

③ Recursion, Heat equation. σ 函数の原点における冪級数展開の係数は閉じた形の漸化式を満たす. その様な漸化式は θ 函数が満たす熱方程式を σ 函数の言葉に焼き直すことで得られることは Weierstrass に源がある. この方法は Buchstaber, Leykin, Enolskii の共著論文で扱はれ, 種数 2 には完全に具体的に拡張された. これを, 種数の高い他の曲線の場合に拡張すること.

④ Hecke の L 函数と楕円 Gauss 和と関係, Bernoulli-Hurwitz 数との合同関係. これは, 本研究とは直接の関係を持たないが, 筆者が 10 以上前から, 研究してゐるものであつて, Birch Swinnerton-Dyer 予想や, 現在はあまり考察されてゐない additive reduction の場合の p 進 L 函数の構成についても示唆を与える可能性があるもので, 重要であらうと考へたため, 研究を行つた.

3. 研究の方法

(1) 海外研究者との効率的な分担作業

① 本研究計画では, 海外研究者との効率的な分担作業により, 進展を図つた. 実施内容は次の通り:

J.C. Eilbeck 氏を 2016 年 11 月 20 日から 11 月 25 日までの 1 週間に渡り, 名城大学に招聘し, 集中的に議論と計算をしながら, 全体の構想を得るに至つた.

計算機の扱ひと数式処理に関して非常詳しい上 Abel 函数論を理解してゐる J.C. Eilbeck は, 実際に熱方程式を構成し, それから漸化式を解いた.

② 随時, 国内での発表と email 等を使つて研究の推進をし, Web での情報発信も行なつた.

(最後の【研究集会での発表】 list を参照)

これにより, 研究交流を計り, 関連する分野の研究者との議論を行なふことができる.

③ 整数論を中心に, 様々な研究集会に出席し, 研究交流を計り, 関連する分野の研究者との議論を行なふ.

(2) 本研究費を使用しての出張の状況

本研究費を使用した出張とその時期を記録しておく.

① 早稲田大学 整数論セミナー

<http://www.waseda.jp/sem-wnt/>

2016 年度に計 4 回の出席

・ 第 7 回 2016 年 5 月 27 日 (金)

講演者: 足立 恒雄 (早稲田大学名誉教授)

非ユークリッド幾何のモデルで成り立つ命題は公理系から証明できるか?

・ 第 8 回 2016 年 6 月 3 日 (金)

講演者: 橋本 喜一郎 (早稲田大学)

演題：Modular Construction of Unramified A_5 extensions over Quadratic Fields

- ・ 第 9 回 2016 年 6 月 10 日 (金)
講演者：権業 善範 (東京大学)
演題：有限体上定義された特異点を持つファノ多様体の有理点について
- ・ 第 15 回 2016 年 7 月 22 日 (金)
講演者：呼子 笛太郎 (東北大学)
演題：分裂高さと正標数体上のカラビヤウ多様体の持ち上げについて
- ・ 第 10 回 2017 年 6 月 23 日 (金)
講演者：大槻 玲 (慶應義塾大学)
演題：Sprung の p 進 L 関数の重さが 3 以上の場合の一般化について

② その他の出張

- ・ 第 23 回 早稲田大学整数論研究集会
2019 年 3 月 13 日 ~ 15 日 (講演有)
- ・ 第 22 回 早稲田大学整数論研究集会
2018 年 3 月 13 日 ~ 15 日
- ・ 第 21 回 早稲田大学整数論研究集会
2017 年 3 月 21 日 ~ 23 日
- ・ 熱方程式の関係で研究打合せ
2016 年 6 月 9 日
山梨大学 人間教育学部, 小池健二研究室
- ・ Inter-universal Teichmüller Theory Summit 2016 (RIMS workshop, July 18-27 2016)
2016 年 7 月 17 日 ~ 20 日のみ
数理解析研究所
- ・ 紀尾井町数理セミナー
講演者：金子昌信 (九州大学)
演題：“楕円モジュラー関数の実二次点における「値」について”
2018 年 6 月 9 日, 城西大学
- ・ 研究集会「代数的整数論とその周辺」
2018 年 11 月 26 日 ~ 30 日
京都大学数理解析研究所,
- ・ 研究集会「可積分系理論から見える数理構造とその応用」
2018 年 9 月 13 日 ~ 15 日
京都大学数理解析研究所,

③ 招聘の記録

- ・ 共同研究の推進のため,
2016 年 11 月 20 日 ~ 11 月 25 日
J. C. Eilbeck (Heriot-Watt 大学)
- ・ 愛知数論セミナーでの講演と研究討議のため,
2017 年 6 月 24 日 ~ 25 日
武田 渉 (京都大学)

4. 研究成果

(1) 主な成果

① Hurwitz 整性. 素数 2 以外に関しては, 中屋敷氏の示唆による σ 関数の無限次数の行列式表示を利用することで証明ができた. ただし, 頭初の予想と少し異なり, 分母に 2 が現れることがある. その場合もこの方法で完全に特定ができたので, 全体をまとめて preprint server 上に発表した. それを brush up して, 最終的に査読付きの学術誌に発表した.

② Hermite-Frobenius-Stickelberger 型の行列式表示公式の拡張. こちらはまだ一般的な証明を得られていないため, 前回の研究で公表した slide の web page への掲載以外の発表はできていない.

③ Recursion, Heat equation. [論 1] 今回は, 細部の精査を済ませるところまで進み, 論文は完成されて, 投稿済みである.

(2) 成果の国内外での位置付け, impact 等.

流行の研究ではないので, 大きな反響があつた訳ではないが, 以下の点は特筆できる.

- ① 実際に recursion system を構成したことにより, 実際に沢山の項が得られることを確認できたことから, 様々な実験が可能となつた.
- ② 熱方程式は σ 関数の冪級数展開の係数を recursive に与へるだけでなく, [BL] とは別の論文で Buchstaber-Leykin が述べてゐる様に theta 関数から σ を構成する際に, なぜ判別式の $\frac{1}{8}$ 乗を掛ける必要があるのかを説明することができる. [BL] の精密な証明を得たがゆゑに, 古典的な楕円曲線の場合に判別式を Dedekind の η 関数で表す式の高次元化に興味が移つてゐて, Dedekind η 関数の多変数版の存在が仄めかされることとなつた.
- ③ Modality 0 の場合の理論が明瞭になつたため, modality > 0 の場合の何が問題かが明確になつた.

(3) 今後の展望

以下の事柄は, 近い将来, 必ず実現される.

- ① 熱方程式が σ 関数の特徴付けるのか否か. modality が正の場合を含めた研究.
- ② σ 関数の解析的な構成において, なぜ判別式の 8 乗根で割る必要があるのかの本質的な理由を解明すること.
- ③ Modality が正の場合の判別式の計算方法の開発.
- ④ 「1 研究開始当初の背景」で挙げた (6) と (7), および
- ⑤ 「2 研究の目的」の (3) ④ で挙げた研究の完成.

5. 主な発表論文等

【雑誌論文】(計 3 件)

- [論 1] J.C.Eilbeck, J.Gibbons, Y. Ônishi, S.Yasuda : “Theory of heat equations for sigma functions”
<http://arxiv.org/abs/1510.03002> 2018 年 (査読無)
- [論 2] Y. Ônishi : “Arithmetical power series expansion of the sigma function for a plane curve” Proc. of the Edinburgh Math. Soc., 61:4(Nov. 2018) 995-1022 <https://doi.org/10.1017/S0013091517000463> (査読有)
- [論 3] J.C.Eilbeck and Y. Ônishi : “Recursion relations on the power series expansion of the universal Weierstrass sigma Function”, RIMS Kôkyûroku Bessatsu (査読有, 掲載受理)

【研究集会での発表】(計 4 件)

- [発 1] 大西良博 : “Vanishing elliptic Gauss sums and Bernoulli-Hurwitz type numbers”
第 40 回 愛知数論セミナー,
2019 年 3 月 30 日, 愛知工業大学 本山キャンパス
- [発 2] 大西良博 : “A recursion system on the expansion coefficients of the sigma function for a higher genus curve”
第 23 回 早稲田大学整数論研究集会,
2019 年 3 月 13 日 ~ 15 日,
早稲田大学西早稲田キャンパス
- [発 3] 大西良博 : “On a generalization of the theory of heat equations for the Weierstrass sigma function to higher genus case” 研究集会「可積分系理論から見える数理構造とその応用」
2018 年, 9 月 6 日 ~ 8 日,
数理解析研究所
- [発 4] 大西良博 : “Weierstrass の sigma 関数の高種数版に対する熱方程式とその応用”,
第 28 回 愛知数論セミナー,
2016 年 10 月 22 日 (名古屋工業大学)

【図書】(計 0 件)

【その他】 (計 3 件) ホームページ等

[他 1] 上記 [発 3] の発表 slide:

<http://www.meijo-u.ac.jp/~yonishi/#publications>

[他 2] 上記 [発 2] の発表 slide:

<http://www.meijo-u.ac.jp/~yonishi/#publications>

[他 3] 上記 [発 1] の発表 slide:

<http://www.meijo-u.ac.jp/~yonishi/#publications>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

なし

(2) 研究協力者

なし