

令和 4 年 6 月 17 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05083

研究課題名(和文)半順序構造の組合せ論と量子対称性

研究課題名(英文)Combinatorics of partially ordered sets and quantum symmetries

研究代表者

前野 俊昭 (Maeno, Toshiaki)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：60291423

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の目標は、組合せ環論および量子変形の観点から(有限)半順序集合の組合せ構造を研究することである。

本研究課題の主要な結果の一つは、ある種のマトロイドに付随したGorenstein環に対するLefschetz性である。この結果は幾何的モジュラー束に対するSperner性を導くものである。また、共同研究者ら共に超平面配置に対するSolomon-Terao代数の概念を導入し、その基本的性質を示した。本研究課題では旗多様体の量子K理論についても研究を行い、Peterson同型のK理論的類似として量子Grothendieck多項式とK-k-Schur多項式の対応を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

順序集合は理論的な考察対象としてのみならず、応用数理においても重要な役割を果たしている。本研究は、組合せ環論的アプローチや量子変形の観点から順序構造の組合せの研究を目指したものである。主な成果としてマトロイドから定まるGorenstein環を導入し、そのLefschetz性を研究したが、これは今後マトロイドに関わる組合せ環論の研究において基礎的な結果になるものと考えられる。また、旗多様体の量子K環に関して量子Grothendieck多項式とK-k-Schur多項式との対応を研究したが、これはWeyl群上のBruhat順序の拡大とアフィンWeyl群上のBruhat順序の対応に相当している。

研究成果の概要(英文)：The aim of the project is to study the structure of (finite) partially ordered sets from the viewpoints of combinatorial ring theory and of quantum deformations.

One of the main results of this project is the Lefschetz property for a certain class of Gorenstein algebras associated with matroids. This result implies the Sperner property for the geometric modular lattices. I also introduced the notion of the Solomon-Terao algebra for hyperplane arrangements with the collaborators, and have shown its basic properties.

The quantum K-theory for the flag variety was also studied in the project. The correspondence between quantum Grothendieck polynomials and K-k-Schur functions has been proved as a K-theoretic analogue of the Peterson isomorphism.

研究分野：代数学

キーワード：代数的組合せ論 量子代数 鏡映群 Hopf代数

1. 研究開始当初の背景

研究代表者の過去の研究においては、旗多様体の量子コホモロジー環に関連して Schubert 多項式の量子化や、Hopf 代数を用いた余不変式代数の記述等を研究してきた。また、余不変式代数等の可換 Artin 環に対する Lefschetz 性の研究も行い、幾つかの結果を得ていた。

研究開始当初においては、可換 Artin 環の Lefschetz 性の研究が世界的に活発になりつつあり、半順序集合と関連した環の Lefschetz 性の問題に関心が持たれていた。更に、トロピカル幾何等の観点から、マトロイドに関する幾何学的研究も多くの研究者の関心の対象となっていた。

量子 Schubert calculus については、旗多様体の量子コホモロジー環に対する Peterson 同型の理解が進み、その K 理論版の存在が示唆されていた。Peterson 同型は順序構造的な側面においては、ワイル群上の Bruhat 順序の拡大とアフィン Weyl 群上の Bruhat 順序との対応に関連している。

2. 研究の目的

半順序集合 (ポセット) は現代数学における基礎的な概念の一つであり、様々な分野に現れる重要な研究対象である。本研究では、組合せ論・有限幾何・表現論等で現れる多様な半順序構造に対し、代数的諸構造との関係および新しいタイプの対称性の発掘という観点から研究を行う。例えば鏡映群の Bruhat 順序は表現論、Schubert calculus、可積分系、超平面配置等で現れる諸構造を統制する役割を果たし、異なる分野に遍在する半順序構造の一例である。このように異なる文脈で現れる順序構造について、その対称性という統一的視点から新たな組合せ構造の発見と理解を目指す。本研究では一般に有限幾何やグラフ理論で重要なクラスの半順序も視野に入れ、Hopf 代数による量子対称性の記述や、組合せ環論の手法を用いた構造の解明を目標とする。

3. 研究の方法

ある種の Artin 環に対する Lefschetz 性が、対応する半順序集合の Sperner 性の証明に応用できることは Stanley の過去の結果において指摘されていた。本研究においては体上の有限次元 Gorenstein 環を系統的に構成する方法を用いて順序集合に付随する Gorenstein 環を構成し、Hessian 判定法を利用して Lefschetz 性を示すという方針をとった。Groebner 基底の議論により、構成した Gorenstein 環の定義関係式もマトロイドの言葉で明示的に記述できるというのは組合せ的に顕著な点である。

また、A 型の旗多様体の量子 K 環に対しては、Grothendieck 多項式の量子化が Lenart と研究代表者により構成されている。相対論的戸田方程式の解を利用して、量子 Grothendieck 多項式と双対安定 Grothendieck 多項式や K - k -Schur 多項式を直接関連付けるという方針により、A 型の場合は代数的に K 理論的 Peterson 同型の構成を行うことができた。

4. 研究成果

(1) マトロイドに付随する Gorenstein 代数の構成とその Lefschetz 性

標数 0 の体上の有限次元 (標準) 次数付き Gorenstein 環の定義イデアルは、ある多項式 F を消すような微分多項式により生成されるものとして特徴付けられる。この多項式 F としてマトロイドの基底の母関数を取ることで、マトロイドに付随した Gorenstein 環を定義することができる。この Gorenstein 環が次数付き線型空間としてマトロイドのフラットにより張られる線型空間と同型になるのは、幾何的モジュラー束に対応する場合に限られることが証明される。幾何的モジュラー束に対応する場合には、Hessian 判定法を用いた議論 [4] により強 Lefschetz 性を持つことが示された。この結果は、幾何的モジュラー束が Sperner 性を持つことも含意している。また、上記 Gorenstein 環の定義イデアルに含まれる二項式に注目することにより、この定義イデアルの Groebner 扇と多項式 F が定めるトロピカル超曲面との関係も明らかになった。

論文 [3] においては、幾何的モジュラー束に対応するとは限らない場合にも、マトロイドに付随する Gorenstein 環は Lefschetz 性を持つであろうと予想している。この予想についても近年様々な進展があり、肯定的な傍証が揃いつつある。我々の結果はグラフ的マトロイドの場合を含まないが、グラフ的マトロイドに関しては Yazawa 氏や Nagaoka 氏による結果 [6], [7] により 1 次の Lefschetz 性が示されている。また、一般のマトロイドについても Hodge-Riemann 関係式の観点からの研究が Murai 氏、Nagaoka 氏、Yazawa 氏 [5] によりなされている。

(2) 超平面配置に対する Solomon-Terao 代数

超平面配置と一つの多項式が与えられたとき、その超平面配置に沿った対数的導分加群をもとに Solomon-Terao 複体が定義される。Solomon-Terao 複体の 0 次のコホモロジー群には次数付き

環の構造が入り、これが Solomon-Terao 代数である。一般に Solomon-Terao 代数の Hilbert 関数は Solomon-Terao 多項式と一致する。また、コクセター配置の場合には Solomon-Terao 代数は余不変式代数と一致し、更にそのイデアル配置の場合には Hessenberg 多様体のコホモロジー環と一致することも知られている [1]。この Solomon-Terao 代数の基本性質として、超平面配置の自由性と Solomon-Terao 代数が完全交差であることが同値であることが示された。自由配置とは限らない場合に、Solomon-Terao 代数がどのようなクラスの環になっているのかが興味深い問題である。一方、Lefschetz 性の観点では、完全交差環は Lefschetz 性を持つであろうことが予想されている。従って、Solomon-Terao 代数に対する Lefschetz 性の研究も自然な問題意識と考えられる。

(3) A 型旗多様体に対する K 理論的 Peterson 同型

旗多様体の量子コホモロジー環に対しては、対応する Lie 群のループ群のホモロジー (Pontrjagin 環) と同型であることが 90 年代から Peterson により指摘されていた。Peterson 同型の下で、量子 Schubert 多項式は k -Schur 多項式に対応することになる。この Peterson 同型の K 理論版が存在することは自然に期待されるものである。コホモロジー的 Peterson 同型は戸田方程式の解と関連しているが、K 理論的な場合は相対論的戸田方程式の解を利用することにより具体的に同型写像を構成することができる。旗多様体の量子 K 環に対しては、Grothendieck 多項式の量子変形が Lenart と研究代表者 [2] により導入されていた。この量子 Grothendieck 多項式が K 理論的 Peterson 同型により、安定双対 Grothendieck 多項式と対応していることが確認された。

(4) オークション関数に対する多項式表示

情報セキュリティに関わる数理的問題として、 p 進展開表示された数の間での加法・乗法の演算の各桁での結果を p 元体上の関数として表示することは秘匿計算などの実用的な面からも重要で興味深い。こうした問題に関連して \max , \min , argmax などの最大・最小問題に関わるオークション関数を p 元体上の多項式として具体的に表示した。得られた表示については、有限体上の対称関数の観点からも興味深いものがある。また、2 元体上の多項式関数については投票ゲーム的な観点からすると一つの意思決定方式を表しているものと見ることもできるため、ゲーム理論的な応用も期待される。

< 引用文献 >

[1] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai and T. Sato, "Hessenberg varieties and hyperplane arrangements," J. Reine Angew. Math. 764 (2020), 241-286.

[2] C. Lenart and T. Maeno, "Quantum Grothendieck polynomials," <https://arxiv.org/abs/math/0608232>.

[3] T. Maeno and Y. Numata, "Sperner property and finite-dimensional Gorenstein algebras associated to matroids," J. Commut. Algebra 8 (2016), no. 4, 549-570.

[4] T. Maeno and J. Watanabe, "Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials," Illinois J. Math. 53 (2009), no. 2, 591-603.

[5] S. Murai, T. Nagaoka and A. Yazawa, "Strictness of the log-concavity of generating polynomials of matroids," arXiv:2003.09568.

[6] T. Nagaoka and A. Yazawa, "Strict log-concavity of the Kirchhoff polynomial and its applications to the strong Lefschetz property," J. Algebra 577 (2021), 175-202.

[7] A. Yazawa, "The eigenvalues of Hessian matrices of the complete and complete bipartite graphs," J. Algebraic Combin. 54 (2021), no. 4, 1137-1157.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Takuro Abe, Toshiaki Maeno, Satoshi Murai and Yasuhide Numata	4. 巻 71
2. 論文標題 Solomon-Terao algebra of hyperplane arrangements	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 1027-1047
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Shizuo Kaji, Toshiaki Maeno, Koji Nuida and Yasuhide Numata	4. 巻 13
2. 論文標題 Polynomial expressions of p-ary auction functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Cryptology	6. 最初と最後の頁 69-80
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takeshi Ikeda, Shinsuke Iwao and Toshiaki Maeno	4. 巻 -
2. 論文標題 Peterson isomorphism in K-theory and relativistic Toda lattice	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 6421-6462
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rny051	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Toshiaki Maeno and Yasuhide Numata	4. 巻 8
2. 論文標題 Sperner property and finite-dimensional Gorenstein algebras associated to matroids	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 549-570
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1216/JCA-2016-8-4-549	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 前野 俊昭
2. 発表標題 Ideas and techniques in the theory of Lefschetz properties
3. 学会等名 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshiaki Maeno
2. 発表標題 The Lefschetz property for Artinian Gorenstein algebras
3. 学会等名 Algebraic Geometry in Positive Characteristic and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toshiaki Maeno
2. 発表標題 Polynomial expressions of auction functions
3. 学会等名 情報セキュリティにおける数学的方法とその実践（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	CIRM			
Sweden	Institut Mittag-Leffler			