様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　５ 月　　９ 日現在

機関番号：３４３１６
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５０８４

研究課題名（和文）多重旗多様体の軌道分解

研究課題名（英文）Orbit decomposition of multiple flag varieties

研究代表者
松木　敏彦（Matsuki, Toshihiko）

龍谷大学・文学部・教授

研究者番号：２０１５７２８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：標数が２でない無限体 F 上の偶数次 split 直交群 G の有限型多重旗多様体の分類を完成した。ただし、多重旗多様体（旗多様体の直積）M 上の G の対角作用による軌道が有限個のとき、M は有限型であるという。この結果をプレプリントとして arXiv:1903.06335 に発表し、雑誌に投稿した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
この問題は一般線形群と symplectic 群のとき、および奇数次 split 直交群のときに解決されていた。今回の成果により、古典群のときの分類は完成した。また、体 F は任意であるので、さらに広い応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：Let G be the split orthogonal group over an infinite field F of characteristic not two. We completely classified multiple flag varieties (direct products of flag varieties) of G of finite type. Here a multiple flag variety M is said to be of finite type when M has a finite number of G-orbits with respect to the diagonal action. This result was announced in arXiv:1903.06335 as a preprint and submitted to a journal.

研究分野：リー群論

キーワード：古典群

１．研究開始当初の背景

(1) 一般線形群と symplectic 群の場合

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ を体 $\mathbb{F}$ 上の一般線形群とし、$G/P_1, \ldots, G/P_k$ を G の旗多様体とするとき、G は多重旗多様体 $G/P_1 \times \cdots \times G/P_k$ に対角的に自然に作用する。Magyar-Weyman-Zelevinsky [1] は 1999 年にこの作用が有限型（軌道の数が有限個）であるための $G/P_1, \ldots, G/P_k$ の条件を求め、軌道の parametrization を与えた。特に、有限型であるためには k が 3 以下であることが必要であることも示された。$k = 2$ の場合は Bruhat 分解に他ならないので $k = 3$ の場合が問題であった。彼らはこの問題を quiver の表現論に帰着させて解決した。なお、彼らは $\mathbb{F}$ を代数的閉体と仮定している。

引き続く論文 [2] において、彼らは symplectic 群に対して一般線形群に埋め込む方法を用いて同じことを行なった。この場合、$\mathbb{F}$ が代数的閉体という仮定は本質的である。

(2) P_3 が Borel 部分群 B の場合

Brion-Vinberg の定理により、$\mathbb{F}$ が標数 0 の代数的閉体のとき、$G/P_1 \times G/P_2$ が開 B 軌道を持てば軌道の数は有限である。Littelmann [3] および Stembridge [4] は表現のテンソル積の分解の問題に帰着させることにより、一般の単純代数群 G について、P_3 が Borel 部分群の場合に 3 重旗多様体が有限型になるための条件を決定している ([3] は P_1, P_2 が極大放物型部分群の場合)。この方法では軌道の数が「有限」であることはわかっても軌道の parametrization はできない。

(3) 奇数次 split 特殊直交群の 3 重旗多様体の典型例

標数が 2 でない任意の体 $\mathbb{F}$ に対し、$\mathbb{F}^{2n+1}$ 上の対称 2 次形式 (,) を $(e_i, e_j) = \delta_{i,2n+2-j}$ で定義する。ただし、$e_1, \ldots, e_{2n+1}$ は $\mathbb{F}^{2n+1}$ の標準基底とする。この 2 次形式に関する特殊直交群 $G = \mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{F})$ は Chevalley 型代数群であって扱いやすい。$e_1, \ldots, e_n$ で張られる $\mathbb{F}^{2n+1}$ の部分空間を固定する G の部分群 P は G の極大放物型部分群である。研究代表者は論文 [5] において 3 重旗多様体 $G/P \times G/P \times G/P$ および $G/P \times G/P \times G/B$ の軌道分解を明示的に与えた。軌道の数の式と $\mathbb{F}$ が有限体の場合に各軌道に含まれる元の数の式も与えた。

(4) 奇数次 split 特殊直交群の有限型多重旗多様体の分類

研究代表者は論文 [6] において、標数が 2 でない任意の体 $\mathbb{F}$ に対し、 奇数次 split 特殊直交群 $G = \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{F})$ の多重旗多様体 $G/P_1 \times \cdots \times G/P_k$ が有限型になるための必要十分条件を与えた。

[1] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, Multiple flag varieties of finite type, Adv. Math. **141**(1999), 97-118

[2] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, Symplectic multiple flag varieties of finite type, J. of Algebra **230**(2000), 245-265

[3] P. Littelmann, On spherical double cones, J. of Algebra **166**(1992), 142-157

[4] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters, Representation Theory. **7**(2003), 404-439

[5] T. Matsuki, An example of orthogonal triple flag variety of finite type, J. of Algebra **375**(2013), 148-187

[6] T. Matsuki, Orthogonal multiple flag varieties of finite type I: Odd degree case, J. of Algebra **425**(2015), 450–523

２．研究の目的

(1) 偶数次 split 直交群の多重旗多様体について有限型になるための必要十分条件を求める。

(2) Chevalley 型の例外型単純群について (1) と同じことを行なう。

本研究の特色：

Stembridge による $P_3 = B$ のときの分類がベースとなる。奇数次の場合よりも多くの P_1, P_2 について $G/P_1 \times G/P_2 \times G/B$ は有限型であるので、分類は複雑になると予想される。

しかしながら、奇数次の場合と同様にすべて初等線形代数で研究できるはずである。

３．研究の方法

偶数次 split 直交群および Chevalley 型の例外型単純群の多重旗多様体について、無限型の多重旗多様体が埋め込まれている場合を除外することにより、有限型になるための必要十分条件を求め、軌道分解を記述する。

以上の研究計画を行なうため、次のことが必要である。

(1) リー群の表現論との関連については東京大学の小林俊行との研究連絡を行なう。

(2) リー群、代数群、表現論関係の研究集会に出席して資料収集を行なう。

(3) リー群、代数群、表現論関係の書籍を充実させる。

４．研究成果
(1) 問題設定　正の整数列 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ $(a_1 + \cdots + a_p \leq n)$ に対し、$G = \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{F})$ の旗多様体

$$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} = \{V_1 \subset \cdots \subset V_p \mid \dim V_j = a_1 + \cdots + a_j,\ (V_p, V_p) = \{0\}\}$$

が定義される。標準的な旗 $m_0 : \mathbb{F}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{a_1} \subset \cdots \subset \mathbb{F}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{a_1+\cdots+a_p}$ に対し、m_0 の固定部分群 $P_{\mathbf{a}} = \{g \in G \mid gm_0 = m_0\}$ は G の標準的放物型部分群であるので、$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \cong G/P_{\mathbf{a}}$ と見なせる。本研究の目標は、多重旗多様体 $\mathcal{M}_{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k} = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}_1} \times \cdots \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}_k}$ が有限型になるための $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ の条件を求めることである。
(2) $\mathrm{O}_4(\mathbb{F})$ の典型的な５つの無限型４重旗多様体

$$\mathcal{M}_{(1),(1),(1),(1)},\ \mathcal{M}_{(2),(1),(1),(1)},\ \mathcal{M}_{(2),(2),(1),(1)},\ \mathcal{M}_{(2),(2),(2),(1)},\ \mathcal{M}_{(2),(2),(2),(2)}$$

を用いて、任意の４次以上の偶数次 split 直交群の k 重旗多様体 $(k \geq 4)$ は無限型であることを証明した。

これによって、以下では３重旗多様体 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}$ のみを調べればよいことがわかる。ただし、

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p), \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q), \quad \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_r)$$

とする。
(3) ６次、８次、１２次の直交群の典型的な無限型３重旗多様体を構成し、これらを直和成分に持つものを除外することによって、３重旗多様体 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$ が有限型になるための $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に関する必要条件を与えた。結果は次の通りである。まず、$\mathcal{T}$ が有限型ならば、$\mathrm{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のどれかは (1) または (n) である。従って

$$\mathbf{a} = (1) \text{ または } \mathbf{a} = (n), \quad q \leq r \tag{A}$$

と仮定してよい。次に、$\mathbf{a} = (1),\ q \geq 2$ のとき、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のどちらかは $(k, n-k)$ である。よって

$$\mathbf{a} = (1),\ q \geq 2 \Longrightarrow \mathbf{b} = (k, n-k) \tag{B}$$

と仮定してよい。さらに、$\mathbf{a} = (n),\ q \geq 2$ のとき、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のどちらかは $(1,1),\ (1, n-1)$ または $(n-1, 1)$ である。よって

$$\mathbf{a} = (n),\ q \geq 2 \Longrightarrow \mathbf{b} = (1,1),\ (1, n-1) \text{ or } (n-1, 1) \tag{C}$$

と仮定してよい。

最後に、体の条件 $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| = \infty$ の下で無限型になる６次および１０次の直交群の３重旗多様体を用いて、次の３つの（$\mathcal{T}$ が有限型になるための）必要条件を得た。

$$\max(a_1, b_1, c_1) < n \Longrightarrow |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty \tag{D}$$
$$\mathbf{a} = (n),\ \max(b_1 + b_2, c_1 + c_2) < n \Longrightarrow |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty \tag{E}$$
$$\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b),\ 3 \leq b \leq n-2,\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 < n \Longrightarrow |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty \tag{F}$$

(4) 次の有限型３重旗多様体の分類定理を定式化した。

定理 条件 (A), …, (F) の下で、$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$ が有限型になるのは次の７つの場合である。
(I-1) $\mathbf{a} = (1),\ q = 1$
(I-2) $\mathbf{a} = (1),\ \mathbf{b} = (k, n-k)$
(II) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (1),\ (2),\ (3),\ (n-1),\ (n),\ (1,1),\ (1, n-1)$ or $(n-1, 1)$
(III-1) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b),\ 4 \leq b \leq n-2,\ r = 1$
(III-2) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b),\ 4 \leq b \leq n-2,\ r = 2$
(III-3) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b),\ 4 \leq b \leq n-2,$

$$\mathbf{c} = (1, k, n-k-1),\ (k, 1, n-k-1),\ (k, n-k-1, 1),\ (1, 1, k),\ (1, k, 1) \text{ or } (k, 1, 1)$$

(III-4) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b),\ 4 \leq b \leq n-2,$

$$\mathbf{c} = (1, 1, 1, n-3),\ (1, 1, n-3, 1),\ (1, n-3, 1, 1),\ (n-3, 1, 1, 1) \text{ or } (1, 1, 1, 1)$$

(5) 上記の定理の７つの場合について、すべて有限型であることを証明した。これによって、偶数次 split 直交群の有限型多重旗多様体は完全に分類された。

以上の結果をプレプリントとして arXiv:1903.06335 に発表し、雑誌に投稿した。

５．主な発表論文等
〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計 4 件）
① 松木敏彦、偶数次直交群の有限型多重旗多様体（問題設定）、日本数学会年会、2019 年
② 松木敏彦、偶数次直交群の有限型多重旗多様体の分類、日本数学会年会、2019 年
③ 松木敏彦、偶数次直交群の有限型多重旗多様体、RIMS 共同研究　表現論と代数、解析、幾何をめぐる諸問題、2018 年
④ 松木敏彦、直交群の多重旗多様体、RIMS 共同研究　表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題、2016 年