様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月 １９ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５０８７

研究課題名（和文）混合モティーフに関連したDG三角圏の研究

研究課題名（英文）Study of DG triangulated categories related to mixed motives

研究代表者

花村　昌樹（Hanamura, Masaki）

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：６０１８９５８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：複素アフィン空間の半代数的集合Aに対し，座標超平面に対数的極をもつ微分形式のA上の積分を考える．Aと座標超平面との交わりに関するある条件のもとでこの積分が収束することを示した．Aがm+1次元，微分形式がm次の閉形式のとき，その各座標平面Hにおける剰余形式のAとHの交わりの上の積分が，もとの微分形式のAの位相的境界のうえの積分に等しいことを示した(一般的Cauchy公式と呼ばれる)．これらを用いて混合Tateモティーフに対しそのHodge実現を構成することができる．これはBloch-Krizにより(条件付きで)構成されていたものを精密に一般化したものである．(木村健一郎氏，寺杣友秀氏との共同.)

研究成果の学術的意義や社会的意義
混合Tateモティーフ理論はデデキントゼータ値に関するZagier予想や多重ゼータ値などとも関係し，基本的な重要性を持つが，そのHodge構造との関係について厳密かつ理解しやすい理論展開をすることが望まれる．混合Tateモティーフの圏論の一つは代数的サイクルを用いた構成で，BlochとKrizが与えた．Hodge構造との関係についてもBloch-Krizはその先鞭をつけたが，条件付きの部分や正しくない部分もあり，研究者に理解されているとは言いにくい．我々の研究は厳密で理解でき，使うことができる方向を目指し成果を得ている．

研究成果の概要（英文）：For a semi-algebraic set A in a complex affine space and a differential form with logarithmic poles along the coordinate hyperplanes, satisfying a certain condition on the intersection of A and the coordinate hype-rplanes, we showed convergence of the integral of the form on A. When A has dimension m+1 and the form has degree m, we showed that the integral of the residue of the form along H (a coordinate hyperplane) on the intersection of A and H, coincides with the integral of the original form on the topological boundary of A. Using these, we can associate to each mixed Tate motif a mixed Hodge structure. This generalizes and makes precise the construction made by Bloch-Kriz, under certain conditions. (Work with Kenichiro Kimura and Tomohide Terasoma).

研究分野：代数幾何学

キーワード：混合モティーフ　混合Hodge構造　代数的サイクル　周期積分

１．研究開始当初の背景

混合 Tate モティーフ理論は混合モティーフ理論の一部であるが Dedekind ゼータ値に関する Zagier 予想や多重ゼータ値などとも関係し, 基本的な重要性を持つ.

S. Bloch と I.Kriz により，混合 Tate モティーフのアーベル圏のひとつの候補が提出され，さらに Hodge 実現関手が２つの方法で定義されていた．従って各混合 Tate モティーフに対して, Hodge 構造が２通りの方法で定まる．このうち，２番目の構成は計算にも適しているが，ある条件の下でなされており，その条件の意味や一般性が不明であった．これを明確にすることが望まれた．

この内容は, 実半代数幾何, 位相幾何における一般的な問題を解明することも含んでいる.

２．研究の目的

Bloch-Kriz による，混合 Tate モティーフの Hodge 構造の構成の，実半代数幾何的側面，解析的側面，ホモロジー代数的側面を追究する.

(1) 実半代数的集合上の微分形式の積分，収束条件，Cauchy 公式の高次元への拡張，実半代数的集合と因子の交差理論などの定式化し，証明する.

(2) それらの帰結として，上述した Bloch-Kriz による Hodge 構造の第 2 の構成が広い条件のもとで厳密にできることを示す.

３．研究の方法

(1) 半代数的集合を研究するための技法として，三角形分割，半代数的写像の局所自明性，スライシング，Lojasiewicz の不等式を用いる.

(2) 位相幾何より，Borel-Moore ホモロジーの理論を，必要な補足をしながら用いる．特に位相的チェインを用いた理論と，層理論を用いた理論の明示的な比較を必要とする.

(3) 古典的 Cauchy 公式の証明を基に，高次元への拡張を考察する.

(4) Deligne による混合 Hodge 理論の枠組みを用いて, 混合 Tate モティーフに対応する Hodge 複体を構成し，それより混合 Hodge 構造を得る

４．研究成果

1．複素アフィン空間の半代数的集合のうえの極をもつ微分形式の積分

代数幾何に現れるホモロジー群の周期は，半代数的集合の上で微分形式を積分して得られる．コンパクトと限らない代数多様体を考えるときは対数的極をもつ微分形式も考察する必要がある．このような形の積分の一般論は系統的に研究されてこなかった.

(1) (収束の定理) n次元の複素アフィン空間のm次元の半代数的集合Aに対し，座標超平面に対数的極をもつm次の微分形式をAの上の積分を考える．「Aと各面F (=座標超平面の交わり)が次元の意味で横断的に交わる」という条件のもとで，この積分が収束することを示した．このため半代数的集合についての，三角形分割，半代数的写像の局所自明性，スライシング，Lojasiewiczの不等式などを用いた．さらに代数幾何の手法として「blow-upによる因子の特異点解消」の理論を用いた.

(2) (Generalized Cauchy formula) Aが(m+1)次元，さらに微分形式がm次で閉のとき，その各座標平面Hにおける剰余形式(residue form)を交差チェインA.Hの上で積分したものが，もとの微分形式をAの位相的境界のうえで積分したものに等しいことを示した．(n=1の場合は複素関数論において知られている，一般化されたCauchy公式である.)

以上の結果は論文 Integration of logarithmic forms on semi-algebraic sets, I and II (共著者：K. Kimura and T. Terasoma) にまとめられた.

2．Borel-Moore ホモロジーにおけるcap積の理論

位相空間のBorel-Mooreホモロジー群は代数幾何でも基本的な重要性をもつ．層理論による定義と，無限チェインを用いた定義がある．また，双方にcap積などの作用素が存在する．
n次元の複素アフィン空間の半代数的集合Sが各面と次元の意味で横断的に交わるとき，Sと各座標平面との「交叉」をチェインとして適切に定めることができるが，その理論的な基礎を確立した．交叉の定義にはBorel-Mooreホモロジーにおけるcap積を用いるが，その定義は(a)双対化層(dualizing sheaf)を用いた層理論による定義と，(b)空間を単体複体とみなしたときの無限chainのホモロジーを用いた定義があり，その明示的な比較が必要となる．そのため，以下のようにより一般的な結果を定式化，証明した． これより，(a)と(b)が一致すること，および特に(b)の定義が単体分割に取り方によらないことが分かる．

(1) 無限chainの特異ホモロジーに対し，「サポートつきのcap積」の定義を与えた．他方，Borel-Mooreホモロジーについては，サポートつきのcap積の一般論は知られていた.

(2) Borel-Mooreホモロジーと無限chainの特異ホモロジーの間のchainレベルでの同値を具体的に与えた．同値の存在は抽象的には知られていたが，これを明示的に与えたということである.

(3) さらにこの同値を通じて，それぞれのホモロジーにおけるサポートつきcap積が一致することを示した.

これらは論文`` Borel-Moore homology and cap product operations" にまとめられた.

3．混合 Tate モティーフの混合 Hodge 構造.

S．Bloch と I.Kriz により，混合 Tate モティーフのアーベル圏のひとつの候補が提出され，さらに Hodge 実現関手が２つの方法で定義されていた．その２番

目の構成の概略は多少詳しく述べる.
n 次元複素アフィン空間 A^n の Hodge 複体で, その Betti 部分が A^n の位相的チェインの複体であるものを構成する. この Hodge 複体の構造の一部として, の体積形式を積分することによって得られる周期が取り込まれている. n 全てを動かして全複体を考えることにより, １点の Hodge 複体 Γ を得る. さらに Tate twist により, Hodge 複体 Γ(r) を得る. 構成より余次元 r のサイクル複体 Z^r からΓ(r)へのチェイン写像が存在する. これがチェイン写像であることを示すのに, Cauchy 公式が必要である. Hodge 実現関手はこのチェイン写像を用いて構成できる.
以上において仮定されている主な条件は, (a) A^n の位相的チェインの複体で適切な性質を満たすものの構成, (b) 積分の収束 (c) Cauchy 公式, である.

上記 1 の微分形式の積分の研究と, ２の交差理論により, (a), (b), (c)のそれぞれが, 一般的に成立することが示された. これより次が得られる.

(1) (Hodge実現関手のひとつの構成) 混合Tateモティーフのアーベル圏からのHodge実現関手を構成することができる. これはBloch-Krizにより(条件付きで)構成されていたものを精密な形で一般化したものである.

以上は, 論文 Integration of logarithmic forms on semi-algebraic sets II (共著者：K. Kimura and T. Terasoma) にまとめられている.

4. 明示的なHodge複体の構成

複素数体上のコンパクトと限らないスムースな代数多様体に対し, その混合Hodge構造を与える対象として, Deligneは混合Hodge複体の概念を与え, さらにBeilinsonはそれをチェインレベルで考察し, Hodge複体の概念を与えた(後者の方が詳しい情報を持った対象である);
Hodge複体Kは複体の３つ組K_Q, K'_C, K_Cとそれらに間の比較擬同型からなる. 両者の違いは, 導来圏の対象を与えることと, 複体を与えることとの相違に似ている. Beilinsonによると, スムースな代数多様体Xに対し, Hodge複体K(X)が対応し, それはXの混合Hodge構造を計算する. この構成は抽象的な層の理論に基づいたものであり, 関手性などの性質を満たしているが, 実際に用いるのには都合が悪い場合がある.
これについて, Hodge複体の上記とは別の次の構成を行った.

コンパクトと限らないスムースな代数多様体Xと正規交叉因子Hに対し, Hodge複体E(X, H)であって, 次の性質を満たすものを構成した.

(a) E(X, H)はコホモロジーH*(X, H)を与える.

(b) E(X, H)のQ-部分E(X, H)_Qは, X上の位相的なチェインのなす複体である. より正確には, XがコンパクトかつHがスムースの場合, 半代数的チェインの複体の間の制限写像C_*(X) -> C_{*-2}(H)の錐複体である.

(c) E(X, H)のC-部分のひとつ， E(X, H)'_Cは，Hに対数的極を持つX上の微分形式の複体を用いて記述される．より正確には，Xがコンパクトの場合，Hに対数的極をもつ微分形式の空間A(X)<H>の双対複体である．

 また，もう一つのC-部分, E(X, H)_Cは制限写像A(X)-> A(H)の錐複体である．

(c) 比較擬同型E(X, H)_Q-> E(X, H)'_Cの構成は，Cauchy-Stokes公式を必要とする．

Cauchy-Stokes公式とは, 複素アフィン空間の実半代数的集合で座標超平面と横断的に交わるものと, 座標平面に対数的極をもつm次微分形式が与えられたとき, その積分のみたす公式で，古典的なCauchy公式と，Stokes公式を特殊な場合として含む．微分形式が閉の場合は，以前にこの公式は木村健一郎氏，寺杣氏との研究により示されていた．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　6件／うち国際学会　3件）

１．発表者名 Masaki Hanamura
２．発表標題 Explicit Hodge complexes of smooth varieties
３．学会等名 Arithmetic and algebraic geometry（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Masaki Hanamura
２．発表標題 Hodge complexes and Deligne homology
３．学会等名 Seminar on Algebra, Analysis and Geometry（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Masaki Hanamura
２．発表標題 Hodge complexes of smooth varieties
３．学会等名 Conference on special varieties（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 Masaki Hanamura
２．発表標題 Borel-Moore homology and operations
３．学会等名 特殊多様体研究集会（招待講演）
４．発表年 2016年

1．発表者名 Masaki Hanamura
2．発表標題 Integration of logarithmic forms and the generalized Cauchy formula
3．学会等名 代数・幾何・解析セミナー（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2017年

1．発表者名 花村　昌樹
2．発表標題 代数多様体のモティーフ理論 - その始まりと発展
3．学会等名 日本数学会東北支部会（招待講演）
4．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

—

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考