

令和 元年 5 月 31 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05088

研究課題名(和文) ガロア点を用いた射影多様体の分類理論と新展開

研究課題名(英文) Classification theory of projective varieties by Galois points and new developments

研究代表者

深澤 知 (Fukasawa, Satoru)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：20569496

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 非特異射影曲線に対して「ガロア点2つを伴う平面への双有理埋め込み」の存在判定法を見出した。(2) (1)を利用してその例を構成した(脇氏、東根氏との共同研究)。(3) Giulietti-Korchmaros 曲線の「ガロア直線配置」を決定した(東根氏との共同研究)。(4) 商曲線に対する(1)の判定法を見出した(東根氏との共同研究)。(5) 2つの外ガロア点に付随する群が半直積を生成する平面曲線を分類した(Speziali氏との共同研究)。(6) double-Frobenius nonclassical 曲線のガロア点配置を決定した(Borges氏との共同研究)。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ガロア点は曲線の対称性を表現していると考えられます。それが複数存在するという状況を、代数関数体という代数学の標準的な言語で表現できること(判定法)を発見しました。その表現は代数幾何、群論、数論という代数学の理論を結びつけるものです。この判定法を、符号(例：QRコード)の構成に用いられている「最大曲線」にも適用し、ガロア点を複数もつことを証明しました。ここにガロア点と符号理論とのつながりが見えます。

研究成果の概要(英文)：(1) A criterion for the existence of a birational embedding into a projective plane with two Galois points was presented. (2) Several new examples were described, by the criterion (joint works with K. Waki and K. Higashine). (3) The arrangement of Galois lines for the Giulietti-Korchmaros curve was determined (j.w.w. Higashine). (4) A criterion for two Galois points for quotient curves was presented (j.w.w. Higashine). (5) Plane curves possessing two Galois points at which Galois groups generate a semi-direct product were classified (j.w.w. P. Speziali). (6) The set of all Galois points for double-Frobenius nonclassical curves was determined (j.w.w. H. Borges).

研究分野：代数幾何

キーワード：ガロア点 準ガロア点 ガロア群 射影 射影代数多様体 正標数 ガロワ点 自己同型群

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

1996年、吉原久夫氏(新潟大学)は代数幾何学においてガロア点という新たな概念を導入した:射影平面内の平面曲線Cに対し、平面内の点Pからの射影により誘導される関数体の拡大がガロア拡大であるとき、PをCのガロア点という。吉原氏はガロア点がどのような点が説明する際つぎのようにいう:「空間に浮かぶ立方体を想像してください。一般の位置に視点を置いてその立体を眺めると何ら対称性は見えませんが、正方形や正六角形など対称性の高い図形が見える特殊な点があります。ガロア点とはそのような点です。」

吉原氏は標数零の非特異平面曲線に対してガロア点の分布を完全に決定した。これによりガロア点研究の基本的な方法・ガロア点を用いた分類理論の基盤が確立したといえる。その後ガロア点の概念は、超曲面のガロア点、ガロア部分空間、ガロア埋め込み・・・等、吉原氏自身によって拡張され、発展を遂げた。2006年頃、本間正明氏(神奈川大学)は $q$ 元体上定義されたHermitian曲線について、ガロア点の集合と射影平面の $q^2$ 元体有理点の集合とが一致することを示した。2011年に著者は正標数の非特異平面曲線に対するガロア点の分布を完全に決定した。次の段階として著者は「(内)ガロア点の個数の上限」に着目した。無限個のガロア点をもつ平面曲線を分類(長谷川武博氏(滋賀大学)との共同研究)し、それ以外の上限を与え、それに到達する曲線を分類した。他方、著者は、Ballico-Hefez曲線と呼ばれる有理曲線について、ガロア点の配置と有理点の配置が全く一致することを示した。続いて本間氏、Seon Jeong Kim氏(慶尚大, 韓国)と共同研究を進め、この曲線上の有理点を用いたある代数幾何符号の最小距離を決定した。

2015年に応募者は三浦敬氏(宇部高専)・高橋剛氏(新潟大学)と共同研究を行い、ガロア点の一般化である「準ガロア点」を導入した。準ガロア点とは、点射影と可換となる曲線の自己同型写像が存在するとき、その射影の中心点のことと定義した。これまで蓄積されたガロア点の結果を準ガロア点の結果として拡張した。

ガロア点研究における重要な成果のひとつは「ガロア点の分布によって射影多様体を分類する」という種類の結果がいくつも得られていることである。例えば吉原氏により、標数零で外ガロア点を最大にもつ非特異超曲面は、フェルマー超曲面であることが証明されている。このように2016年頃には「ガロア点を用いた分類理論が推進されている」と言える程度に結果が生まれていた。一方、上述したように、有理点・符号理論などの別の分野との関係がいくらか見出されていた。さらに準ガロア点の導入により、ガロア点研究及びその新展開について、新たな発展が期待される時期にあった。それが2016年ごろの状況であった。

### 2. 研究の目的

以上の背景を踏まえて本研究においては、ガロア点及びその一般化である準ガロア点を用いた射影多様体の分類理論の推進、他分野との関係の中から新たな発展を創出すること、の2つを目的とした。特に、「ガロア点分布による平面曲線の分類」の推進、「準ガロア点と有理点・符号理論との関係」をより深く見出すこと、を取り組むべき対象とした。

### 3. 研究の方法

平面曲線のガロア点については、代数曲線論の基本であるHurwitzの分岐公式、Weierstrass点理論とガロア被覆の基本性質を用いた。正標数においてはこれらの扱いはより複雑になる。例えばHurwitzの公式についてはdifferentの概念が必要となる。正標数特有の現象に細心の注意を払いながらこれらの手法を用いた。加えて、ガロア点は自己同型群と関係があるため、基本的な群論を使った。

下記(1)の成果により、正標数の種々の最大曲線(有理点の個数がHasse-Weil上限に到達する曲線)がガロア点を複数もつかどうかという問題を思いつき、最大曲線の重要な例として知られるSuzuki曲線、Ree曲線、Giulietti-Korchmaros曲線、Skabelund曲線に関する基礎事項を確認し、ガロア点研究に持ち込んだ。

### 4. 研究成果

(1) 非特異射影代数曲線に対して「ガロア点2つを伴う平面への双有理埋め込み」が存在するための必要十分条件(判定法)を、関数体とその自己同型の言葉で与えた。判定条件は3つあり、そのひとつは「2つの自己同型群がある有限集合に適切に作用する」という組合せ論的な条件である。有理曲線と楕円曲線に適用することにより、ガロア点を複数もつ新たな例を少なくとも3例発見した。特に、付随する群が同型でないガロア点を曲線上に2つもつ曲線の例を初めて与えた(雑誌論文(3))。

(2) 成果(1)で得られた「ガロア点2つを伴う双有理埋め込みの存在」判定法を利用して、有理曲線、Deligne-Lustzig曲線、(ある種の)Artin-Schreier曲線という3つの系統についてガロア点を複数もつ双有理埋め込みを構成することができた。

有理曲線については、脇克志氏(山形大学)の協力を得て「4種」発見した。脇氏には計算機探索をお願いした。その探索で得られた結果を手計算に落とし、計算機を必要としない証明をつけることもできた。

Deligne-Lustzig曲線として知られるHermitian, Suzuki, Ree曲線について上記の双有理埋め込みを構成した(雑誌論文(2))。2種のArtin-Schreier曲線については、山形大学大学院生の東根一樹氏との共同研究により得られた(雑誌論文(4))。この2つの結果により、Hennの(大きな自己同型群をもつ曲線の)分類リストに現れる4種の曲線すべてについて、ガロア点2つを伴う双有理埋め込みが存在することを示すことができた。

- (3) 東根氏とGiulietti-Korchmaros 曲線の  $P^3$  内の「ガロア直線」配置を完全決定した。これらはある条件を満たす  $F_{q^2}$  直線として特徴づけられる。Giulietti-Korchmaros 曲線は標準的に  $P^3$  に埋め込まれているが、それを  $P^2$  に射影した平面モデルもGiulietti と Korchmaros により考察されている。その平面モデルについて、ガロア点の配置を完全決定した。特に、曲線上に非特異でガロア点となるものが  $q+1$  個あることがわかった (雑誌論文(1))。
- Giulietti-Korchmaros 曲線は「Hermitian 曲線に被覆されない最大曲線の最初の例」として 2007 年に発見され、正標数代数曲線論において極めて重要な存在であると位置づけられている。最大曲線や自己同型群、符号理論に関係した研究結果がたくさん挙げられているが、今回の結果はそれらキーワードを含まない点において、GK 曲線の新たな性質をみつけており、注目に値する。
- (4) 東根氏と「商曲線」に対するガロア点 2 つを伴う双有理埋め込みの存在判定法を見出した。研究成果(1)(2)に記述したように、著者は「ガロア点 2 つを伴う双有理埋め込みの存在」判定法を見出し、そのような性質をもつ代数曲線をたくさん発見した。判定法における組合せ論的条件を満たす例をみつけることで多くの例を構成してきたが、2018 年頃には、さらなる例を構成するには統一的な観点が必要な時期にさしかかっていた。そこで目をつけたのが「商曲線」であった。成果(2)で述べた Aritin-Schreier 曲線は Hermitian 曲線の商曲線であり、Hermitian 曲線自体もガロア点を持っている為、「ガロア点を複数もつ」という性質が商曲線に落ちてきているのではないか」という考察をした。これを定式化し、上記の判定法を見出した。これを種々の代数曲線、特に Giulietti-Korchmaros 曲線 (とその商曲線) と Skabelund 曲線 (とその商曲線) に適用し、更なる例を構成することに成功した。「商曲線に対するガロア点 2 つを伴う双有理埋め込みの存在」判定法は、最大曲線の商曲線と相性が良い。最大曲線の商曲線はふたたび商曲線となることから (度々 Serre が引用される)、最大曲線の研究において商曲線を考察することは数論的に重要な位置を占める。今後、この判定法と最大曲線の商曲線研究がどのように関係してくるか、という研究の種を生んだと言っても過言ではない。
- (5) 2 つの外ガロア点が生成する群に注目し、バジリカータ大学 (イタリア) 博士院生の Pietro Speziali 氏と 2017 年に共同研究を始めた。この研究により、2 つの外ガロア点をもち、それに付随する 2 つの群による生成群が位数  $d^2$  の半直積であるとき、その平面曲線の定義方程式を決定することができた。ここに、半直積のコカーネルの方は巡回群であることを証明した。もうひとつの群が巡回群であるときはフェルマー曲線に、二面体群であるときには高橋剛氏が考察した曲線  $x^d+y^d=0$  に射影同値であることを示した。標数零において複数の外ガロア点をもつ種数 1 以上の曲線はこれら 2 種しか知られておらず、それら 2 種を統一的に扱えた点においても意義深い。
- (6) サンパウロ大学 (ブラジル) 准教授の Herivelto Borges 氏と Frobenius nonclassical 曲線のガロア点配置を考察した。特に 2 つの素数べきに関して Frobenius nonclassical であるという “double-Frobenius nonclassical” 曲線に関して、ガロア点配置を完全決定した。特に 2 つの特殊な状況においては、ガロア点が  $F_q$  有理点と一致することを示した。この結果は著者が 2016 年の論文で提出した問題に否定的解答を与えるものであり、その問題をよりの確なものに修正することができた。double-Frobenius nonclassical 曲線は自己同型群が有限体上の射影変換群を含む点において興味深く、正標数代数曲線の自己同型群研究で重要な例として位置づけられている Dickson-Guralnick-Zieve 曲線を含む点でも重要である。
- (7) 標数が零のとき、曲線上のガロア点の個数の上限は 4 と予想されている。有理曲線という限定的な場合を除いておく。このときさらに平面曲線が「はめ込みでない」とときには、上限「2」を与えた。従ってこの予想を示すには、平面曲線をはめ込み曲線と仮定してよい。さらに曲線の次数  $d$  が偶数である場合には、上限が「5」以下であることを示した。さらにいくつかの状況下、特に  $d-1$  が 2 でも 3 でも割れない場合には、予想が正しいことを示した。詳細は省くが、曲線の外のガロア点に関しても類似の結果が得られた。これまでの (具体例を除いての) 結果は三浦敬氏の「 $d-1$  が素数」の場合があり、それを大幅に拡張したといえる。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4 件)

- (1) [Satoru Fukasawa](#) and Kazuki Higashine, Galois lines for the Giulietti-Korchmaros curve, *Finite Fields and Their Applications*, 57 (2019), 268-275, 査読有. DOI: 10.1016/j.ffa.2019.02.009
- (2) [Satoru Fukasawa](#), Birational embeddings of the Hermitian, Suzuki and Ree curves with two Galois points, *Finite Fields and Their Applications*, 57 (2019), 60-67, 査読有. DOI: 10.1016/j.ffa.2019.02.002
- (3) [Satoru Fukasawa](#), A birational embedding of an algebraic curve into a projective plane with two Galois points, *Journal of Algebra*, 511 (2018), 95-101, 査読有. DOI:

10.1016/j.jalgebra.2018.06.020

- (4) Satoru Fukasawa and Kazuki Higashine, A birational embedding with two Galois points for certain Artin-Schreier curves, *Finite Fields and Their Applications*, 52 (2018), 281-288, 査読有. DOI: 10.1016/j.ffa.2018.04.009

[学会発表](計 14 件)

- (1) 深澤知, Galois points for double-Frobenius nonclassical curves, 新潟代数セミナー, 2018 年 10 月, 新潟大学理学部
- (2) 深澤知, 2 つの外ガロア点に付随する群が半直積を生成する平面曲線の分類, 射影多様体の幾何とその周辺, 2018 年 10 月, 高知工科大学永国寺キャンパス
- (3) 深澤知, Galois lines for the Giulietti-Korchmaros curve, Workshop on Galois point and related topics, 2018 年 9 月, 新潟大学駅南キャンパスときめいと
- (4) Satoru Fukasawa, Galois lines for the Giulietti-Korchmaros curve, *Combinatorics 2018*, 2018 年 6 月, Casino Municipale, Arco, Italy
- (5) 深澤知, 2 つの外ガロア点に付随する群が半直積を生成する平面曲線の分類, 正標数における代数曲線, 2018 年 3 月, 山形大学理学部
- (6) Satoru Fukasawa, A birational embedding of an algebraic curve into a projective plane with two Galois points, *Geometric Galois Theory and Monodromy*, 2017 年 09 月, Department of Mathematics, University of Pavia, Italy
- (7) 深澤知, 正標数におけるガロア点を複数もつ平面曲線, 第 5 回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ, 2017 年 08 月, 北海道教育大学札幌駅前サテライト
- (8) 深澤知, A birational embedding of an algebraic curve into a projective plane with two Galois points, 10th Workshop on Galois point and related topics, 2017 年 07 月, KKR 蔵王白銀荘
- (9) Satoru Fukasawa, A birational embedding of an algebraic curve into a projective plane with two Galois points, The 13th International Conference on Finite Fields and their Applications, 2017 年 06 月, Hotel Serapo, Gaeta, Italy
- (10) 深澤知, 準ガロア点と自己同型群, 代数曲線と自己同型群, 2017 年 03 月, 山形大学理学部
- (11) 深澤知, 平面代数曲線上のガロア点、有理点、符号, 代数幾何学と暗号数理の展開, 2017 年 02 月, 九州大学西新プラザ
- (12) 深澤知, 正標数におけるガロア点を複数もつ平面曲線, 代数幾何学研究集会 宇部, 2017 年 01 月, 宇部工業高等専門学校,
- (13) 深澤知, 標数零における平面曲線のガロア点の個数について, Workshop on Galois point and related topics, 2016 年 6 月, 新潟大学駅南キャンパスときめいと
- (14) 深澤知, 有限体上の平面曲線に対する有理点とガロア点, 離散数理セミナー, 2016 年 5 月, 山形大学理学部

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。