

令和 4 年 6 月 15 日現在

機関番号：12613

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05093

研究課題名(和文) マンフォード-テイト領域のコンパクト化と log 幾何

研究課題名(英文) Compactifications of Mumford-Tate domains and log geometry

研究代表者

中山 能力 (NAKAYAMA, Chikara)

一橋大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：70272664

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：マンフォード-テイト領域(代数群が作用する周期領域の変種)の種々のコンパクト化を、log 幾何を用い、代数群の作用付きの対数混合ホッジ構造のモジュライ空間として構成した。その過程でマンフォード-テイト領域の冪零軌道によるコンパクト化、 $SL(2)$ -軌道によるコンパクト化および Borel-Serre 軌道によるコンパクト化を構成し、それらの間の関係についての基本図式を確立した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ある数学的对象全部の集合に自然な空間構造を入れたものをモジュライ空間といい、モジュライ空間を調べやすくするために無限遠点を追加してコンパクト化することが重要である。log 幾何は各種モジュライ空間のコンパクト化を構成する広く一般的な枠組みを提供する。本研究では log 幾何を応用し、従来構成されていなかった、混合マンフォード-テイト領域のコンパクト化に成功した。

研究成果の概要(英文)：We construct various compactifications of the Mumford-Tate domain (variants of the period domains with the actions of algebraic groups) as moduli spaces of mixed log Hodge structures endowed with the action of algebraic groups. In this process, the compactification of nilpotent orbits, the compactification by $SL(2)$ -orbits and the compactification by Borel-Serre orbits are constructed, and the fundamental diagram including these spaces is established.

研究分野：数論幾何

キーワード：ホッジ理論

1. 研究開始当初の背景

加藤-臼井は 2009 年に出版された [5] において、任意の重みのホッジ構造のモジュライ空間 (周期領域) を \log 幾何を用いてコンパクト化することに成功し (加藤-臼井空間) ホッジ理論の新しい時代を画した。一方、周期領域上の保型形式の理論への期待を実現するために、代数群の作用を導入し、周期領域の変種であるマンフォード-テイト領域を保型形式の定義域とすることが提唱され、2008 年頃から盛んに研究されるようになり、ホッジ理論と表現論との境界分野として、活発な研究活動の場となっていた。ここで、マンフォード-テイト領域はコンパクトではないため、理論を進めるためには、無限遠点を付け加えて、領域をコンパクト化することが必須であり、そのために、加藤-臼井理論がもっとも有力であるということは、研究者間の共通認識であった。実際、マンフォード-テイト領域上の保型形式の理論で最初に成功し、後の沢山の仕事のモデルともなっていた、H. Carayol の論文 [1] では、加藤-臼井理論が、無限遠点を考察する有力な理論として、位置づけられていた。ところが、それにもかかわらず、[1] やそれに続く沢山の仕事では、(加藤-臼井の [5] が引用されているにもかかわらず) 実際には、加藤-臼井理論がそれほど用いられていなかった。その理由は、加藤-臼井の長大な構成が余りにも斬新かつ複雑で、十分に理解されていないためであった。その結果、確かに多くの論文が書かれ、個別の代数群や個別の型の退化についての計算データは集積されていたものの、統一的な理論の構築には至っていなかった。理論の本質的な進展のために、マンフォード-テイト領域の加藤-臼井コンパクト化の構成が待たれていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、このマンフォード-テイト領域のコンパクト化の構成であり、研究期間内に、 \log 幾何に基く加藤-臼井理論の発展型として、マンフォード-テイト領域のトロイダル・コンパクト化を構成することであった。また、その過程でマンフォード-テイト領域の $SL(2)$ -軌道によるコンパクト化および Borel-Serre 軌道によるコンパクト化を構成し、応用として、高次アルバナエゼ多様体のコンパクト化をも構成することを目指していた。

3. 研究の方法

マンフォード-テイト領域のコンパクト化には大きく分けて二つの方法が考えられた。一つは、マンフォード-テイト領域が、従来の加藤-臼井空間の部分領域であることを利用し、従来の結果に帰着させる方法である。もう一つは、一般に代数群が作用するホッジ構造の分類空間を考え、従来の加藤-臼井理論の証明を全てその文脈に書き直して行く方法である。どちらでも、目的は達成できる見込みであったが、後者の方が、より広い枠組みであり、マンフォード-テイト領域だけではなく、Hain-Zucker [2] の高次アルバナエゼ多様体等のコンパクト化へも適用できることが期待できること、また、コンパクト化にもいくつかの種類があり、前者の方法では、トロイダル・コンパクト化ができるだけであるが、後者の方法では、 $SL(2)$ -軌道によるコンパクト化 (物理学におけるミラー対称性の \log 幾何による解釈にも役立つことが有望視されている空間) や Borel-Serre 軌道によるコンパクト化も副産物として構成できることから、この研究では後者の方法を取ることにした。

具体的な研究の方法は、研究者間の情報交換、意見交換、議論が主体となった。特に、漠然とした萌芽段階での構想や微妙な印象などを伝えるにはメールによる連絡はきめ細かさに欠け、直接議論することが不可欠であった。そのため共同研究者と定期的に議論する機会を設け、目的である構成を達成するための方針、困難な点とその克服のために考えられる対策、それらにかかる時間の見積もり、及び、証明できた部分の出版の方法、論文の構成などについて、意見交換、議論を行なった。

4. 研究成果

当研究は当初の予定通り、マンフォード-テイト領域の種々のコンパクト化を、 \log 幾何を用い、代数群の作用付き対数ホッジ構造のモジュライ空間として構成することを達成し終了した。2021 年度に、今までに得られた成果を 120 頁超の論文 [3] にまとめ、専門誌に投稿することができた。この論文の章立ては以下の通りである。1. 代数群の作用付きホッジ構造のモジュライ空間の定式化。2. Borel-Serre 軌道による部分コンパクト化の構成。3. $SL(2)$ 軌道による部分コンパクト化の構成。4. 冪零軌道による部分コンパクト化 (トロイダル・コンパクト化) の構成。

1 においては、数論的部分群の条件の各種設定を比較検討し、作用する代数群の交換子群の有理点のなす群の部分群であって整数構造を保つものとする設定がいろいろな場面で最も効果的であることを見出し、その設定で原稿全体を統一した。2 では、Borel-Serre の理論を援用することによって Borel-Serre 軌道による部分コンパクト化を構成した。3 では $SL(2)$ 軌道による部分コンパクト化を構成したが、群作用がある場合の技術的な困難を、parabolic な部分群とワイル扇の関係を系統的に用いることにより克服した。4 は混合加藤 臼井空間の代数群の作用

付き版の構成であり、メインの部分コンパクト化であるが、先行研究の証明の多くの誤りを修正しなければならなかった。さらにそれらの修正のもとで、基本集合が開集合であることを示さなければならなかったが、代数群の準同型空間の共役関係の理論を用いることによって証明した。

また、当初の目的に含まれていなかったが、応用として、ゴレスキーとタイとによる、トロイダル・コンパクト化と Borel-Serre コンパクト化との関係付けを、上記3つのコンパクト化を含む基本図式の枠組みで簡潔に解釈できることを見出し、別の論文 [4] にまとめ、専門誌に投稿した。この結果の特長は次の通りである。トロイダル・コンパクト化と Borel-Serre コンパクト化という、性質の違うコンパクト化を結び付けるために、ゴレスキーとタイは前者を、ある細分した扇に対応するものに置き換えている。ところが当研究で確立された基本図式を用いれば、扇を細分しなくても、前者を標準的な対象であるところの比の空間に置き換えることで CKS 写像を用いて同等のことが達成できる。CKS 写像の自然な定義域として導入された比の空間がこのように幾何的な応用を持ったことは、今後この分野で比の空間が重要になって来るであろうことを示唆している。

加えて、上の応用において、比の空間に置き換えることができる点を証明するために、log Betti コホモロジーについての各種の底変換定理を非可換係数の場合も含めて統一的に整理する必要が生じ、その主題での論文 [6] をまとめ、専門誌に投稿し、数度の改訂を経て、受理された。

[1] H. Carayol, Cohomologie automorphe et compactifications partielles de certaines varieties de Griffiths-Schmid, *Compositio Mathematica* 141 (5) (2005), 1081-1102.

[2] R. M. Hain and S. Zucker, Unipotent variation of mixed Hodge structure, *Invent. Math.* 88 (1987), 83-124.

[3] K. Kato, C. Nakayama, S. Usui, Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, V: Extended period domains and algebraic groups, preprint, submitted.

[4] K. Kato, C. Nakayama, S. Usui, Toroidal compactifications and Borel-Serre compactifications, preprint, submitted.

[5] K. Kato and S. Usui, Classifying Spaces of Degenerating Polarized Hodge Structures, *Annals of Math. Stud.* 169, Princeton University Press, 2009.

[6] C. Nakayama, Base change theorems for log analytic spaces, to appear in *Tokyo J. Math.*

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件／うち国際共著 4件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Tetsushi Ito, Kazuya Kato, Chikara Nakayama and Sampei Usui	4. 巻 2
2. 論文標題 On log motives	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Tunisian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 733-789
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/tunis.2020.2.733	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, Chikara Nakayama	4. 巻 65
2. 論文標題 Logarithmic abelian varieties, Part VI: Projective models	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Yokohama Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 53-75
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Taro Fujisawa, Chikara Nakayama	4. 巻 43
2. 論文標題 Geometric polarized log Hodge structures with a base of log rank one	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 57-83
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, Chikara Nakayama	4. 巻 64
2. 論文標題 Logarithmic abelian varieties, Part V: Projective models	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Yokohama Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 21-82
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Chikara Nakayama	4. 巻 314
2. 論文標題 Logarithmic etale cohomology, II	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 663-725
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2017.05.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Chikara Nakayama	4. 巻 B64
2. 論文標題 Log abelian varieties (Survey)	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 295-311
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazuya Kato, Chikara Nakayama, Sampei Usui	4. 巻 58
2. 論文標題 Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, IV: The fundamental diagram	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 289-426
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yuichiro Hoshi and Chikara Nakayama	4. 巻 59
2. 論文標題 Categorical characterization of strict morphisms of fs log schemes	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Mathematical Journal of Okayama University	6. 最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Chikara Nakayama
2. 発表標題 Geometric polarized log Hodge structures over the base of log rank one
3. 学会等名 ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Chikara Nakayama
2. 発表標題 Log mixed Hodge 理論における無限遠点の捉え方 (1) Log higher Albanese manifolds
3. 学会等名 ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Chikara Nakayama
2. 発表標題 Log motives and the Hodge realization
3. 学会等名 Workshop: Log geometry, degenerations and related topics. (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Editor: Lizhen Ji	4. 発行年 2017年
2. 出版社 Higher education press	5. 総ページ数 597
3. 書名 Hodge Theory and L^2 -analysis	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	シカゴ大学			