様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月 １２ 日現在

機関番号：１３２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５０９５

研究課題名（和文）一般化された量子群およびコクセター亜群に関連する代数系の研究

研究課題名（英文）Study of generalized quantum groups, Coxeter groupoids and related topics

研究代表者
山根　宏之（Yamane, Hiroyuki）

富山大学・学術研究部理学系・教授

研究者番号：１０２３０５１７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：数学の代数学の分野で群の表現論があり、微積分の手法で研究する事が出来るリー群の表現論が百年以上研究されてきた。リー群の表現論はリー代数の表現論に帰着される。リー代数の表現論は線形代数学の手法で研究する事が出来る。有限次元単純リー代数の有限次元既約表現の指標は1920年代に導入されたWeylの指標公式によって求めることが出来る。Weylの指標公式は、1950年代に導入されたHarish-Chandra同型定理によって本質的な別証明が得られる。当該研究の主結果はこの2つの定理の一般化された量子群の対応物を得たことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義
関孝和の功績にもあるように，数学において行列式は，常に重要な道具であるとともにそれ自体が研究すべき対象である。行列式は、面積や体積などの計算に用いられるのにもかかわらず負の項が出てくることの意味を洞察することから今では数学の多くの分野で使われるコクセター群の発見に繋がっている。山根宏之はコクセター群のさらなる一般化であるコクセター半群を2008年の共著論文で発見し、その一般化された量子群U(χ）の表現論への応用を追い求めてきた。当該研究期間内にU(χ）の表現論の重大な進展であるHarish-Chandra型の同型定理（共著）とWeyl・Kac型の典型指標公式を得た。

研究成果の概要（英文）：As for algebra, which is a branch of mathematics, one of the main topics is studying representation theory of groups. More than one hundred years, specialists have studied representation theory of Lie groups, which can be studied by using calculus. In many cases, it can be reduced to studying Lie algebras, which can be studied by mostly only using linear algebras. The characters of finite dimensional irreducible representations of finite dimensional complex simple Lie algeras can be decided by using the Weyl character formula, which was introduced in 1920's. It can also be proved in an essential way by using the Harish-Chandra isomorphism theorem, which was introduced in 1950's. The main results during the period of this fund are obtaining counterparts of this two theorems for the generalized quantum groups.

研究分野：代数学

キーワード：ホップ代数　一般化された量子群　ワイル亜群　コクセター亜群　スーパーリー代数

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

山根宏之は、1994 年と 1999 年の有限次元複素単純スーパーリー代数および無限次元アフィン型スーパーリー代数の定義関係式を求めた。その過程でコクセター亜群の取り扱いを修得した。Istvan Heckenberger の 2006 年のコクセター亜群を証明に用いた有限型の一般化された量子群 $U(\chi)$の分類をした定理が当該研究の主な動機である。当該研究は、山根宏之の 2008 年のコクセター亜群に関する松本の定理を導入した共著論文から始まった。山根宏之の 2010 年の有限型 $U(\chi)$の Shapovalov 行列式を求めた共著論文が当該研究の本質的な道具である。

２．研究の目的

$U(\chi)$の表現論を研究が主な目的である。$U(\chi)$の表現論の重要な道具である Harish-Chandra 同型定理の論文の査読をへて受理されて出版すること，および典型的既約指標の Weyl・Kac 型の指標公式を構成しプレプリントを書いて査読付き学術雑誌に投稿することが当初の主な目的であった。前者は 2018 年に査読付き学術雑誌に共著論文として出版され，後者は 2019 年 10 月に査読付き学術雑誌に投稿し，2019 年 12 月に査読者による大幅な書き直しの要請が編集者により山根に伝えられ，2020 年 3 月に再投稿誌し，2020 年 5 月に小幅な書き直しの要請がきて再々投稿をした。

３．研究の方法

共著者のところに複数回訪問して，連日数時間にわたる議論をした。外国の研究集会で研究発表をして学問的な刺激を受けた。参考となる教科書的な学術本・論文を何回も読み直して，基本的な同じような計算を何度も繰り返して，証明を体にしみ込ませるようにして会得した。査読者が理解出来て，投稿後の書き直しの要請が来たらすぐに書き直しに取り掛かれるように英文の勉強を常にした。

４．研究成果

(1)<u>一般化された量子群のハリシュ・チャンドラ理論の構成：</u>A を有限ランクのアーベル群とする。K を体とする。$K^\times=K-\{0\}$とする。写像χ： $A\times A\to K^\times$を、$\chi(a+b,c)=\chi(a,c)\chi(b,c)$および$\chi(a,b+c)=\chi(a,b)\chi(a,c)$　$(a,b,c\in A)$をみたすものとする。このようなχから単位元１をもつ結合的 K 代数 $U(\chi)$がドリンフェルドの量子２重構成法により定義される。$\{\alpha_i|i\in I\}$を A の基とする。ここで I は添え字集合であり，特に I の元の個数は A の階数と同じである。$U(\chi)$は K_i，$K_i^{-1},L_i,L_i^{-1},E_i,F_i(i\in I)$を生成元とし，これらの元たちは等式 $K_iK_i^{-1}=K_i^{-1}K_i=1,L_iL_i^{-1}=L_i^{-1}L_i=1$, $K_iK_j=K_jK_i,L_iL_j=L_jL_i,K_iE_jK_i^{-1}=\chi(\alpha_i,\alpha_j)E_j,K_iF_jK_i^{-1}=\chi(\alpha_i,\alpha_j)^{-1}F_j,L_iE_jL_i^{-1}=\chi(\alpha_j,\alpha_i)^{-1}E_j,L_iF_jL_i^{-1}=\chi(\alpha_j,\alpha_i)F_j$，$E_iF_i-F_iE_i=-K_i+L_i$，$E_iF_j=F_jE_i$　$(i\neq j)$　$(i,j\in I)$をみたす。ただし，これらは定義関係式ではない。すなわち，E_i たちどうし，および F_i たちどうしの複雑な関係式で定義関係式となることが有限型の場合に知られている。三角分解 $U(\chi)=U^-(\chi)\otimes U^0(\chi)\otimes U^+(\chi)$（この等式は線形空間としての等式である）が成り立つ。ここで，$U^0(\chi)$は $K_i,K_i^{-1},L_i,L_i^{-1}(i\in I)$で生成される $U(\chi)$の部分代数である。$U^0(\chi)$はローラン多項式代数 $K[K_i,K_i^{-1},L_i,L_i^{-1}|i\in I]$である。$U^-(\chi)$は $F_i(i\in I)$で生成される $U(\chi)$の部分代数である。$U^+(\chi)$は $E_i(i\in I)$で生成される $U(\chi)$の部分代数である。A^+を$\{\alpha_i|i\in I\}$の非負係数一次結合全体のなす A の部分集合とする。$U(\chi)$の部分空間 $U(\chi)_\lambda(\lambda\in A)$を $U(\chi)=\oplus_{\lambda\in A}U(\chi)_\lambda$，$U(\chi)_\lambda U(\chi)_\mu\subset U(\chi)_{\lambda+\mu}$，$U^0(\chi)\subset U(\chi)_0,E_i\in U(\chi)_{\alpha(i)},F_i\in U(\chi)_{-\alpha(i)}$によって定義する。（ここで，$\alpha(i)$は$\alpha_i$を意味する）$\lambda\in A$ に対して，$U^\pm(\chi)_\lambda=U^\pm(\chi)\cap U(\chi)_\lambda$とする。$U^\pm(\chi)=\oplus_{\lambda\in A(+)}U^\pm(\chi)_{\pm\lambda}$である。（ここで，$A(+)$は A^+を意味する）$U(\chi)$は $\Delta(K_i)=K_i\otimes K_i$，$\Delta(L_i)=L_i\otimes L_i$，$\Delta(E_i)=E_i\otimes 1+K_i\otimes E_i$，$\Delta(F_i)=F_i\otimes L_i+1\otimes F_i(i\in I)$となる余積 Δ：$U(\chi)\to U(\chi)\otimes U(\chi)$をもつホップ代数である。$U(\chi)$は Δ を保つドリンフェルド双線形写像 $Ð$：$U^{+0}(\chi)\times U^{-0}(\chi)\to K$をもつ。ここで $U^{+0}(\chi)$は $K_i,K_i^{-1},E_i(i\in I)$で生成される $U(\chi)$の部分代数であり，$U^{-0}(\chi)$は $L_i,L_i^{-1},F_i(i\in I)$で生成される $U(\chi)$の部分代数である。さらに $Ð$ は $Ð(K_i,L_j)=\chi(\alpha_j,\alpha_i)$，$Ð(E_i,F_i)=1$, $Ð(E_i,F_j)=0$　$(i\neq j)$　$(i,j\in I)$をみたす。$Ð(U^+(\chi)_\lambda, U^-(\chi)_{-\mu})=\{0\}$　$(\lambda\neq\mu)$が成り立つ。$Ð$ が $U^+(\chi)_\lambda\times U^-(\chi)_{-\lambda}$ 上で非退化であることが，$U(\chi)$の著しい特徴である。任意のχに対して $U^+(\chi)$に PBW 型定理が存在する事が Kharchenko によって示されている。PBW 生成元が存在する $\lambda\in A^+$全体の A^+の部分集合を $R^+(\chi)$と表し Kharchenko の一般化された正ルート系と呼ぶ。$R(\chi)=R^+(\chi)+(-R^+(\chi))$を Kharchenko の一般化されたルート系と呼ぶ。当該研究では $R(\chi)$が有限集合であって，$\chi(\beta,\beta)\neq 1$という条件を課した。この条件を満たすχとして次のものがある。（あ）

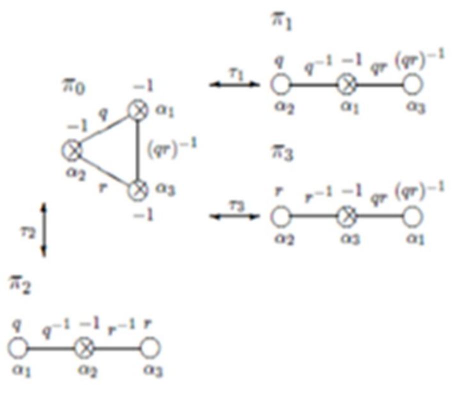

図１：　$U_qD(2,1;x)$のDynkin図形

$q\in K^{\times}$として$\chi(\alpha_i,\alpha_j)=q^{a(ij)}$となっているもの。ここで正方行列$(2a(ij)/a(ii))_{i,j\in I}$はカルタン行列である。$q\to 1$ としての $U(\chi)$の極限が有限次元単純複素リー代数の普遍包絡代数となっているもの。q は１のべき根でも良いが，そのときは，$U^+(\chi)$ は，有限次元である。（い） $q\in K^{\times}$として$\chi(\alpha_i,\alpha_j)=(-1)^{p(i)p(j)}q^{a(ij)}$となっているもの。$q\to 1$ としての $U(\chi)$の極限が A-G 型有限次元単純複素スーパーリー代数の普遍包絡スーパー代数となっているもの。ここで$p(i)\in\{0,1\}$はパリティであり、$(a(ii))_{i,j\in I}$はスーパーリー代数のカルタン行列である。このときも q は１のべき根でも良いが，そのときは，$U^+(\chi)$ は，有限次元である。（う）Heckenberger の分類による沢山の例外型であるもの。（い）と（う）に関しては図１にあるように $U(\chi)$といくつかの別の$U(\chi')$が同型である。（あ）に関しては q セール関係式とよばれる簡単な関係式が $U^+(\chi)$の定義関係式になっている。（い）に関しては$U^+(\chi)$の幾つかの複雑な定義関係式が要求される。例えば図のπ_0のときは,定義関係式は$E_1^2=E_2^2=E_3^2=0$および$(1-q^{-1}r^{-1})\lfloor\lfloor E_1,E_2\rfloor,E_3\rfloor=(1-q)\lfloor\lfloor E_1,E_3\rfloor,E_2\rfloor$である。($\lfloor\ ,\ \rfloor$は q 交換子を意味する）$\pi_1$のときは,定義関係式は$E_2^2=0$, $\lfloor E_1,E_3\rfloor=0$, $\lfloor\lfloor E_2,E_1\rfloor,E_1\rfloor=0$, $\lfloor\lfloor E_2,E_3\rfloor,E_3\rfloor=0$ である。後者の２つの等式が q セール関係式である。（う）の $U^+(\chi)$の定義関係式は Angiono によって求められた。K 代数の準同型写像Λ: $U^0(\chi)\to K$ に対して $M(\Lambda)$と $L(\Lambda)$をそれぞれ$\underline{v}_\Lambda$と v_Λを最高ベクトルとする $U(\chi)$ のヴァーマ加群と最高ベクトル既約加群とする。$\underline{v}_\Lambda$は$Z\cdot\underline{v}_\Lambda=\Lambda(Z)$ $(Z\in U^0(\chi))$, $E_i\cdot\underline{v}_\Lambda=0(i\in I)$および$M(\Lambda)=U(\chi)\cdot\underline{v}_\Lambda=U^-(\chi)\cdot\underline{v}_\Lambda$をみたすものである。各$\lambda\in A^+$に対して$M(\Lambda)_\lambda=U^-(\chi)_\lambda$とおく。線形空間として，$M(\Lambda)=\oplus_{\lambda\in A(+)}M(\Lambda)_{-\lambda}$である。（ここで，A(+)は$A^+$を意味する）$L(\Lambda)$についても同じことがいえる。各$\lambda\in A^+$に対して$\dim M(\Lambda)_{-\lambda}=\dim U^-(\chi)_{-\lambda}$であり，$L(\Lambda)_{-\lambda}$については「$\forall\lambda\in A^+-\{0\},\forall y\in L(\Lambda)_{-\lambda}-\{0\},\exists i\in I,E_i\cdot y\in L(\Lambda)_{-\lambda+\alpha(i)}-\{0\}$」が成り立つ。（ここで，$\alpha(i)$は$\alpha_i$を意味する）線形写像 $\underline{P}:U(\chi)=U^-(\chi)\otimes U^0(\chi)\otimes U^+(\chi)\to U^0(\chi)$を標準的射影とする。各$\lambda\in A^+$に対して線形写像$Sh_\lambda:U^+(\chi)_\lambda\times U^-(\chi)_{-\lambda}\to U^0(\chi)$を$Sh_\lambda(X,Y)=\underline{P}$ (XY) $(X\in U^+(\chi)_\lambda,\ Y\in U^+(\chi)_{-\lambda})$により定義する。（例：$\lambda=2\alpha_1+\alpha_2$ のとき，$Sh_\lambda(E_1^2E_2,F_1F_2F_1)=\underline{P}(E_1^2E_2F_1F_2F_1)=\underline{P}(((-K_1+L_1)E_1+E_1(-K_1+L_1))E_2F_2F_1)=(1+q_{11})\underline{P}((-q_{11}^{-1}K_1+L_1)\quad E_1E_2F_2F_1\quad)=(1+q_{11})p((-q_{11}^{-1}K_1+L_1)E_1(-K_2+L_2)F_1)=(1+q_{11})p((-q_{11}^{-1}K_1+L_1)(-q_{21}^{-1}K_2+q_{12}L_2)E_1F_1)=(1+q_{11})\ (-q_{11}^{-1}K_1+L_1)(-q_{21}^{-1}K_2+q_{12}L_2)(-K_1+L_1)$が成り立つ。ここで$q_{ij}=\chi(\alpha_i,\alpha_j)$とおく。）$U^+(\chi)_\lambda$の K 上の基底$\{X_t|1\leqq t\leqq\dim U^+(\chi)\}$および $U^-(\chi)_{-\lambda}$の K 上の基底$\{Y_t|1\leqq t\leqq\dim U^+(\chi)\}$をとってきて,$\Lambda Sh_\lambda$を$\Lambda(Sh_\lambda(X_t,X_{\underline{t}}))$を成分とするサイズが$\dim U^+(\chi)$である K 上の正方行列とする。標準的な証明で次のことが成り立つ。「$\dim\ L(\Lambda)_\lambda$は正方行列ΛSh_λの階数に等しい。」山根は 2010 年の共著論文で「定理 A：Sh_λの $U^0(\chi)$上の行列式は$\Pi_{\alpha\in R(+,\chi)}\Pi_{t=1}^{\infty}(-\rho(\alpha)\chi(\alpha,\alpha)K_\alpha+L_\alpha)^{P(\alpha;t)}$の$K^{\times}$倍である。」を示していた。ここで，$\rho(\alpha)\in K^{\times}$, $K_\alpha\in U^0(\chi)$, $L_\alpha\in U^0(\chi)$は，それぞれ，特徴づけ$\rho(\alpha_i)=\chi(\alpha_i,\alpha_i)$，$K_{\alpha(i)}=K_i$，$L_{\alpha(i)}=L_i$ $(i\in I)$および$\rho(\alpha\pm\beta)=\rho(\alpha)\rho(\beta)^{\pm1}$，$K_{\alpha\pm\beta}=K_\alpha K_\beta^{\pm1}$，$L_{\alpha\pm\beta}=L_\alpha L_\beta^{\pm1}$ $(\alpha,\ \beta\in A)$により定義される。$\omega:A\to K^{\times}$を$\omega(\alpha\pm\beta)=\omega(\alpha)\omega(\beta)^{\pm1}$ $(\alpha,\ \beta\in A)$をみたすものとする。$\underline{Z}_\omega=\{Z\in U(\chi)_0|\forall\lambda\in A,\ \forall X\in U(\chi)_\lambda,\ ZX=\omega(\lambda)XZ\}$と定義する。$\underline{P}$ は$\underline{Z}_\omega$上で単射である。山根は 2018 年の共著論文で次の定理 B を示した。定理 B がこの小節(1)の主結果である。「定理 B：$\underline{P}$ の $\underline{Z}_\omega$の像 $\underline{P}(\underline{Z}_\omega)(\subset U^0(\chi))$ は，各$\beta\in R(\chi)$に対する次の条件$(e_1)_\beta$，$(e_2)_\beta$，$(e_3)_\beta$，$(e_4)_\beta$をみたすものとして特徴づけされる。すなわち，$\sum_{\lambda,\mu\in A}a_{\lambda,\mu}K_\lambda L_\mu\in\underline{Z}_\omega$ $(a_{\lambda,\mu}\in K)$となる必要十分条件は，各$\beta\in R(\chi)$に対する次の条件$(e_1)_\beta$, $(e_2)_\beta$, $(e_3)_\beta$, $(e_4)_\beta$をみたすことである。$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=\omega(\beta)\chi(\beta,\mu)\chi(\lambda,\beta)^{-1}$とおく。$q_\beta=\chi(\beta,\ \beta)$とおく。「$(e_1)_\beta$：$q_\beta$が１のべき根でなくて、$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=q_\beta^{t}$となる $t\in\mathbb{Z}-\{0\}$があれば，$a_{\lambda+t\beta,\mu-t\beta}=\rho(\beta)^{t}a_{\lambda,\mu}$をみたす。」，「$(e_2)_\beta$：$q_\beta$が１のべき根でなくて、$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=q_\beta^{t}$となる$t\in\mathbb{Z}$がなければ，$a_{\lambda,\mu}=0$ である。」，「$(e_3)_\beta$：q_βが１の原始 c 乗根であって、$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=q_\beta^{t}$となる$1\leqq t\leqq c-1$があれば，$\sum_{x\in\mathbb{Z}}\ a_{\lambda+(cx+t)\beta,\mu-(cx+t)\beta}\rho(\beta)^{-(cx+t)}=\sum_{y\in\mathbb{Z}}\ a_{\lambda+cy\beta,\mu-cy\beta}\rho(\beta)^{-cy}$をみたす。」，「$(e_4)_\beta$：$q_\beta$が１の原始 c 乗根であって、$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=q_\beta^{k}$となる$k\in\mathbb{Z}$がなければ，次の c-1 個の等式$\sum_{x\in\mathbb{Z}}\ a_{\lambda+(cx+t)\beta,\mu-(cx+t)\beta}\rho(\beta)^{-(cx+t)}=\sum_{y\in\mathbb{Z}}\ a_{\lambda+cy\beta,\mu-cy\beta}\rho(\beta)^{-cy}$ $(1\leqq t\leqq c-1)$をみたす。」」定理 B は定理 A を用いて, Kac が別の代数系に対して発案した証明法の流れに沿って証明した。定理 A および定理 B は，1 のべき根での通常の量子群の表現論は研究にも応用できるはずであるが，山根が共著者と独自に作り上げたものなのでそこのところを明らかにすることはまだ出来ていない。1 のべき根での通常の量子群の表現論は，世界的に著名な数学者である Lusztig の予想・理論があり世界的に大々的に研究されている。

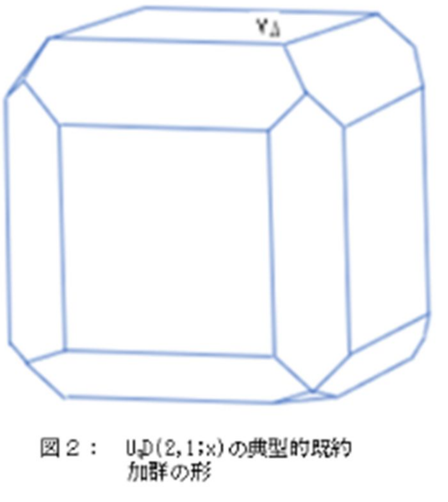

図２： $U_qD(2,1;x)$の典型的既約加群の形

(2) <u>一般化された量子群の典型既約指標の Weyl・Kac 型指標公式の構成：</u>1920 年代に Weyl は、有限次元複素単純リー代数の有限次元既約表現の指標を書き下す「Weyl の指標公式」を与えた。1970 年代に Kac は A-G 型有限次元複素単純スーパーリー代数の典型的有限次元既約表現の指標を書き下す指標公式を与えた。今回、山根は(2)の系として Kac の結果の q 類似を得た。$A=(a(ij)\in\mathbb{Z})_{i,j\in I}$と$p=(p(i)\in\{0,1\})_{i,j\in I}$をそれぞれ A-G 型有限次元複素単純スーパーリー代数の対称カルタン行列とパリティとする。$G=G(A,p)$を(A,p)により定まる A-G 型有限

次元複素単純スーパーリー代数とする。$G=G(0)\oplus G(1)=H\oplus\oplus_{\alpha\in\Delta}G_\alpha$ をカルタン分解とする。ここで $G(0)$ と $G(1)$ はそれぞれ G の偶部分と奇部分である。$G(0)$ はリー代数である。 $H(\subset G(0))$ は G のカルタン部分代数と呼ばれる極大可換リー代数である。$\dim H=|I|$ である。$\underline{E}$ を H の双対線形空間とする。$\lambda\in\underline{E}$ に対して，$G_\lambda=\{x\in G\,|\,\forall h\in H,\ [h,x]=\lambda(h)x\}$ である。$\Delta=\{\lambda\in\underline{E}-\{0\}\,|\,G_\lambda\neq\{0\}\}$ である。$\{\alpha_i\,|\,i\in I\}$ を Δ の基本ルート系とする。$\underline{E}$ 上の対称双線形写像 $(\ ,\ ):\underline{E}\times\underline{E}\to\mathbb{C}$ を $(\alpha_i,\alpha_j)=a(ij)\ (i,j\in I)$ により定める。$\Delta_{car}=\{\alpha\in\Delta\,|\,(\alpha,\alpha)\neq0,\ \alpha/2\notin\Delta\}$ とおき，$\Delta_{null}=\{\alpha\in\Delta\,|\,(\alpha,\alpha)=0\}$ とおく。$\underline{E}_{\mathbb{Z}},\underline{E}_{\mathbb{Z}}^+$ を，それぞれ，$\alpha_i\ (i\in I)$ の整数係数，非負整数係数の１次結合全体のなす $\underline{E}$ の部分集合とする。$\Delta_{car}^+=\Delta_{car}\cap\underline{E}_{\mathbb{Z}}^+$ とおき，$\Delta_{null}^+=\Delta_{null}\cap\underline{E}_{\mathbb{Z}}^+$ とおく。各 $\alpha\in\Delta_{car}^+$ に対して，$s_\alpha\in GL(\underline{E})$ を $s_\alpha(\lambda)=\lambda-(2(\alpha,\lambda)/(\alpha,\alpha))\alpha\ (\lambda\in\underline{E})$ により定義する。W を $GL(\underline{E})$ の $s_\alpha\ (\alpha\in\Delta_{car}^+)$ で生成される部分群とする。群の準同型写像 $sgn:W\to\{\pm1\}$ で $sgn(s_\alpha)=-1$ となるものが定義される。$\rho=\Sigma_{\alpha\in\Delta+car}\alpha-\Sigma_{\beta\in\Delta+null}\beta$ とおく。（ここで、$\Delta+car$，$\Delta+null$ はそれぞれ Δ_{car}^+，Δ_{null}^+ を意味する。）各 $\alpha\in\Delta_{car}^+$ に対して，$r_\alpha\in\mathbb{Z}$ で $(\rho,\alpha)=r_\alpha\cdot(\alpha,\alpha)$ となるものが存在する。$q\in\mathbb{C}^\times$ を１のべき根でないものとする。U_qG を G の量子包絡スーパー代数とする。U_qG は，K_i，K_i^{-1}，$E_i,F_i\ (i\in I)$ を生成元とする結合的 $\mathbb{C}$ 代数であり，等式 $K_iK_i^{-1}=K_i^{-1}K_i=1,K_iK_j=K_jK_i$，$K_iE_jK_i^{-1}=q^{a(ij)}E_j,K_iF_jK_i^{-1}=q^{-a(ij)}F_j$，$E_iF_i-(-1)^{p(i)}F_iE_i=(K_i-K_i^{-1})/(q-q^{-1})$，$E_iF_j=(-1)^{p(i)p(j)}F_jE_i\ (i\neq j)\ (i,j\in I)$ をみたす。ただし，これらは定義関係式ではない。U_qG は，ある標準的な方法で $U(\chi)$ から得られる。U_qG は，三角分解 $U_qG=U_q^-G\otimes U_q^0G\otimes U_q^+G$ をもつ。$\Omega:U_q^0G\to\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 代数の準同型写像とする。$L(\Omega)$ を Ω に対する U_qG 最高ベクトル既約加群とする。v_Ω を $L(\Omega)$ の最高ウエイトベクトルとする。$K_i\cdot v_\Omega=\Omega(K_i)v_\Omega$，$E_i\cdot v_\Omega=0\ (i\in I)$ をみたす。$\lambda\in\underline{E}_{\mathbb{Z}}^+$ に対して $L(\Omega)_{-\lambda}=(U_q^-G)_{-\lambda}$ とおく。$L(\Omega)=\oplus_{\lambda\in E(+)}L(\Omega)_{-\lambda}$ である。（ここで，$E(+)$ は $\underline{E}_{\mathbb{Z}}^+$ を意味する。）$\lambda\in\underline{E}_{\mathbb{Z}}-\underline{E}_{\mathbb{Z}}^+$ に対して $L(\Omega)_{-\lambda}=\{0\}$ とおく。$L(\Omega)$ は有限次元であると仮定する。このとき，各 $\alpha\in\Delta_{car}^+$ に対して，$k^\Omega{}_\alpha\in\mathbb{Z}$ で $\Omega(K_\alpha{}^2)=((-1)^{p(\alpha i)}q^{(\alpha,\alpha)})^{k\Omega\alpha}$ となるものが存在する。（ここで，K_α は(1)の K_α と同様のものであり，αi と $k\Omega\alpha$ はそれぞれ α_i と $k^\Omega{}_\alpha$ を意味する。）W は，$\underline{E}_{\mathbb{Z}}$ に $s_\alpha\diamond\lambda=s_\alpha(\lambda)-(r_\alpha+k^\Omega{}_\alpha)\alpha\ (\alpha\in\Delta_{car}^+)$ により作用する。山根は 2019 年度のプレプリントで次の結果を得た。「定理 C: $L(\Omega)$ は有限次元であると仮定する。さらに，任意の $\alpha\in\Delta_{null}^+$ に対して，$q^{(\rho,\alpha)}\cdot\Omega(K_\alpha)^2\neq1$ であると仮定する。このとき，各 $\lambda\in\underline{E}_{\mathbb{Z}}$ に対して，$\dim L(\Omega)_\lambda=\Sigma_{w\in W}=\dim(U_q^-G)_{\lambda-w\diamond\lambda}$ が成り立つ。」U_qG のみならず全ての有限型の一般化された量子群 $U(\chi)$ についても 定理 C と同じ結果を出した。定理 C については Geer の先行研究があるが，山根は 2015 年の共著論文で $q\to1$ が取れない U_qG の有限次元既約表現が多く存在する事を示した。その場合は Geer の結果は使えない。この事実を 2018 年のブラジルでの国際研究集会で発表したところこの分野の世界的な第一人者にたいそう驚かれた。

(3) <u>その他：</u>コクセター亜群のブルーハー順序を導入した共著論文(2018 年)，多変数量子群のコスタント基底を導入した共著論文(2018 年)，$U_q\mathfrak{sl}(n,n)^{(t)}\ (t=1,2,4)$ の正方向の一番低い中心元を構成した単著論文(2019 年)が出版された。これらは，$U(\chi)$ の構造論・表現論に応用がある事が大いに期待できる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Naihuan Jing, Kailash C. Misra, Hiroyuki Yamane	４．巻 713
２．論文標題 Kostant-Lusztig A -bases of multiparameter quantum groups	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Contemp. Math.	６．最初と最後の頁 149-163
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1090/conm/713	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Hiroyuki Yamane	４．巻 1
２．論文標題 Lowest positive almost central elements of $U_q(sl^{(1)}(n\vert n))$ $(n\geq 2)$, $U_q(sl^{(2)}(2n\vert 2n))$ $(n\geq 2)$ and $U_q(sl^{(4)}(2n+1\vert 2n+1))$ $(n\geq 1)$ and their multi-parameter quantum affine superalgebras	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Proceedins of the Meeting for Study of Number Theory, Hopf Algebras and Related Topics	６．最初と最後の頁 125-140
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Batra Punita、Yamane Hiroyuki	４．巻 222
２．論文標題 Centers of generalized quantum groups	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	６．最初と最後の頁 1203～1241
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2017.06.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Angiono Ivan、Yamane Hiroyuki	４．巻 17
２．論文標題 Bruhat order and nil-Hecke algebras for Weyl groupoids	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	６．最初と最後の頁 1850166
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1142/S0219498818501669	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計29件（うち招待講演　28件／うち国際学会　23件）

1．発表者名 山根宏之
2．発表標題 一般化された量子群の典型的既約指標について
3．学会等名 2020 日本数学会 年会
4．発表年 2020年

1．発表者名 山根宏之
2．発表標題 一般化された量子群の典型的既約指標
3．学会等名 第１回 岩手代数学セミナー（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 山根宏之
2．発表標題 ワイル亜群について
3．学会等名 第３５回リー代数サマーセミナー（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Hiroyuki Yamane
2．発表標題 Skew centerss and generaized quantum groups with Kharchenko PBW theorem
3．学会等名 The International Conference on Lie Theory and Representations 2019 (Department of Mathematics, Shanghai University,China)（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

１．発表者名 山根宏之
２．発表標題 Generalized quantum groups with Kharchenko PBW theorem
３．学会等名 2019年度研究集会「Algebraic Lie Theory and Representation TheoryALTReT)」（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Hiroyuki Yamane
２．発表標題 Graphs of Weyl groupoids
３．学会等名 リー代数特別ゼミ（つくば市文科省研究交流センター，2018.5.18）（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Hiroyuki Yamane
２．発表標題 Minimum positive cenral elements of quantum superalgebras U_qsl^{(t)}(n|n), (t=1,2,4)
３．学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory (ALTReT2018，上智大学セミナーハウス（軽井沢） 2018.5.25-28)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Hiroyuki Yamane
２．発表標題 Generalized quantum groups and Coxeter groupoids
３．学会等名 The Joint International Meeting of CMS-AMS,2018.06.11-14, Fudan University, Shanghai, China, Special Session of Quantum Algebras and Related Topics, (SS25) Meting no. 1140（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名
Hiroyuki Yamane

２．発表標題
Study of Generalized quantum groups with Coxeter groupoids

３．学会等名
Shanghai University Department of Mathematics Seminar no. 1659, 2018.6.12（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Hiroyuki Yamane, Pumita Batra

２．発表標題
Center of generalized quantum groups via Weyl groupoids

３．学会等名
Short communications (2018.8.6), ICM 2018 Rio de Janeiro（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Hiroyuki Yamane

２．発表標題
Representation theory using Coxeter groupoids

３．学会等名
Workshop on Mathematical Physics, August 10-13, 2018, São Paulo, Brazil, ICTP-SAIFR/IFT-UNESP（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Hiroyuki Yamane

２．発表標題
Generalized quantum groups, quantum superalgebras and Coxeter groupoids

３．学会等名
立教大学数理物理学研究センター 臨時セミナー, 2018.9.19（招待講演）

４．発表年
2018年

1．発表者名 Hiroyuki Yamane
2．発表標題 Strict Lusztig isomorphisms af Generalized quantum groups
3．学会等名 Meeting of crystal basis and quantum algebras and superalgebras（富山大学理学部，2018.11.14）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Hiroyuki Yamane
2．発表標題 Generalized quantum groups and their representations
3．学会等名 Quantum 60 Colloquium on Algebras and Representations（Argentina，2018.12.10-14）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Hiroyuki Yamane
2．発表標題 Weyl groupoids and Cayley graphs
3．学会等名 Meeting of number theory, ring theory, Hopf algebra theory and related topics（富山高等専門学校 本郷キャンパス，2019.2.22-23）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2018年

1．発表者名 Hiroyuki Yamane
2．発表標題 Set theoretic Weyl groupoids and generalized quantum groups
3．学会等名 Hopf-Algebra Conference in Tsukuba 2019; H-ACT2019（筑波大学 自然学系棟，2019.3.25-27）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名
Hiroyuki Yamane

2．発表標題
Weyl groupoids and generalized quantum groups with Kharchenko PBW theorem

3．学会等名
Crystals and Their Generalizations(大阪市立大学　数学研究所，2019.3.25-29)（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Hiroyuki Yamane

2．発表標題
Coxeter groupoids and their applications

3．学会等名
Algebra Seminar of Faculty of Mathematics and Natural sciences, Institut Teknologi Bandung, Indonesia（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2017年

1．発表者名
Hiroyuki Yamane

2．発表標題
Conjugacy Theorem of the root bases of an affine root system

3．学会等名
第33回リー代数サマーセミナー（筑波大学）（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2017年

1．発表者名
Hiroyuki Yamane

2．発表標題
Generalized root systems and generalized quantum groups

3．学会等名
2017 年度RIMS 研究集会「表現論と組合せ論」（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2017年

１．発表者名
山根宏之

２．発表標題
Weyl group orbits of root bases of an affine root system

３．学会等名
岩手大学教育学部代数セミナー（招待講演）

４．発表年
2017年

１．発表者名
山根宏之

２．発表標題
アフィン量子超代数$U_q(sl^{(1)}(N|N))$，$U_q(sl^{(2)}(N|N))$，$U_q(sl^{(4)}(N|N))$について

３．学会等名
福井大学工学部談話会（招待講演）

４．発表年
2017年

１．発表者名
山根宏之，Ivan Angiono

２．発表標題
Bruhat order of Weyl groupoids

３．学会等名
日本数学会２０１８年度年会一般講演（招待講演）

４．発表年
2018年

１．発表者名
Hiroyuki Yamane

２．発表標題
Generalized root systems and Representation theorem of Generalized quantum groups

３．学会等名
Infinite Dimensional Lie Superalgebras and Their Representations, May 26-19, 2016（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2016年

1．発表者名 Hiroyuki Yamane
2．発表標題 Generalized root systems and representation theory
3．学会等名 ECNU 2016 Graduate Summer School (August 22-31, 2016)（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

1．発表者名 Hiroyuki Yamane
2．発表標題 Multiplicities of imaginably roots of elliptic Lie algebras
3．学会等名 Workshop on Lie Theory, Quantum Groups and Tensor Categories（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

1．発表者名 Hiroyuki Yamane
2．発表標題 Representation theory of Nichols-diagonal-type generalized quantum groups
3．学会等名 International Workshop on Hopf Algebras and Tensor Categories, September 5-9, 2006（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

1．発表者名 Hiroyuki Yamane
2．発表標題 Nichols Topology
3．学会等名 H-ACT 2016 Hopf Algebras Conference in Tsukuba, September 11-13, 2016（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2016年

１．発表者名 Hiroyuki Yamane
２．発表標題 Representations of generalized quantum groups
３．学会等名 1124th AMS Meeting, November 12-13, 2016, Special Session on Representation of Lie Algebras, Quantum Groups and Related Topics, III（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

〔図書〕　計1件

１．著者名 Hiroyuki Yamane, Takeyoshi Kogiso, Yoshiyuki Koga, Iwao Kimura	４．発行年 2019年
２．出版社 Yokohama Publishers	５．総ページ数 269
３．書名 Proceedings of the Meeting for Study of Number Theory, Hopf Algebras and Related Topics	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Hiroyuki Yamane's Homepage in University of Toyama http://www3.u-toyama.ac.jp/hiroyuki/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考