2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　７ 月　６ 日現在

機関番号：１３４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５０９６
研究課題名（和文）多項式ファイバー環の可換環論的研究

研究課題名（英文）Study of polynomial fibre rings

研究代表者
小野田　信春（Onoda, Nobuharu）

福井大学・学術研究院工学系部門・教授

研究者番号：４０１６９３４７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：可換環論およびアフィン代数幾何学で重要な多項式ファイバー環に関して研究を行い，いくつかの結果を得た。特に，2次元完備正則局所環上の整域がネーター環となるための十分条件を与えるとともに，条件が満たされない場合は定理が成り立たないことを示す具体例を構成した。また，可換環上べき等元で生成された環の同型類について研究し，原始べき等元の個数が有限個の場合は同型類が一つであることを示すとともに，可算無限個の場合についても定理を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
アフィン代数幾何学に関連する可換環論は，国内外に多くの研究者がいて，近年，急速に研究が進み，関連する研究集会も盛んに開催されている。アフィンファイブレーションはその主要な研究テーマの一つであり，未解明の問題も多い。本研究はその進展に資するものであり，また，インドの研究者3名を海外共同研究者に加えた国際共同研究として，国際協調にも貢献するものである。

研究成果の概要（英文）：Some results are obtained regarding polynomial fibre rings which are important both in commutative algebra and affine algebraic geometry. In particular, sufficient conditions are given for an algebra to be Noetherian over a two dimensional complete regular local ring, and examples are constructed to show the necessity of the conditions. Moreover, isomorphism classes are studied for algebras generated by idempotents over a commutative ring. The uniqueness of the isomorphism class is proved for the case where the number of primitive idempotents is finite, and a theorem is given for the case where the number of primitive idempotents is countably infinite.

研究分野：可換代数学

キーワード：可換環論　アフィン代数幾何学

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1)　可換ネーター環 R と R-代数 A が与えられたとき，R の素イデアル P に対し，A_P/PA_P を P 上 A のファイバー環という。ただし，$k(P)=R_P/PR_P$ である。各ファイバーが基礎体 k(P)上の n 変数多項式環 $k(P)^{[n]}$になる場合，A は R 上の A^n-fibration または多項式ファイバー環（polynomial fibre ring）と呼ばれる。ただし，$B^{[n]}$ は環 B 上の n 変数多項式環を表す。多項式ファイバー環に関する考察が始まったのは 1970 年代後半であるが，浅沼照雄の研究①を端緒に，その可換環論的な研究に関心が集まるようになった。

(2)　浅沼の結果を受け，私は，高さ１以下の素イデアル上のファイバーがすべて１変数多項式環になるような A について考察した。このような A は codimension-one A^1-fibration と呼ばれる。これまでに採択を受けた科研費により，Bhatwadekar，Dutta との共同研究の下，codimension-one A^1-fibration A について詳細に研究した結果，R 上忠実平坦という仮定の下で A の構造を決定し，さらに，従来知られていた結果はすべてその構造定理から導けることを示した（②，③）。

２．研究の目的

(1) 上述した研究の背景を踏まえ，可換環論における次の一般的な問題を考える：

『R を可換ネーター正規環，A を R-algebra，Γを Spec R の部分集合とする。このとき，Γの各要素 P についてファイバー環 A_P/PA_P の構造が与えられているとして，A の構造を決定せよ。』

(2) 本研究の目的は，この問題に関して具体的に課題を設定し，その考察を通して可換環論およびアフィン代数幾何学の進展に資すことである。

３．研究の方法

(1) まず，本研究には，海外共同研究者として，S. M. Bhatwadekar 教授（元 Tata Institute，現 Bhaskaracharya Pratishthana（略称 BP 研究所），インド，プネ市）と A. K. Dutta 教授および N. Gupta 准教授（いずれも Indian Statistical Institute，インド，コルカタ市）に加わっていただく。

(2) 今回の研究は過去の研究の発展であり，関連するいくつかの結果を得ているので，それらを利用するとともに，その際に行った考察を進化させることで解決を目指す。それを遂行するための具体的な方法は，以下の通りである。

・国内外の各地の研究者と随時研究連絡，討論，打ち合わせ等を行う。
・海外共同研究者とは，普段は e-mail により情報交換を行うが，毎年，海外共同研究者のもとに出張して直接討論を行う。
・研究上必要となるコンピュータを購入し，計算ソフトを用いて具体例を数多く求める。

４．研究成果

(1) 今回の研究は，次の問題に対する考察を中心にして行った。

問題　２次元正則局所環 R 上の環 A について，A が R 上有限生成となるための条件を求めよ。

この問題については過去に採択を受けた科研費による研究で成果を得ているが，今回，新たな定理を証明することができた。まず，準備として以下の補題を証明した。

補題 1　(S,n)は１次元完備ネーター局所整域で剰余体 k の代数閉包は k 上有限拡大であるとする。B は S を含むネーター整域で，S 上代数的かつ $nB\neq B$ とする。このとき B は有限 S-加群である。

補題 2　(S,n)は１次元局所整域とする。B は S を含む整域で，nB=B とする。このとき B は体である。

補題 3　(R,m)は２次元局所整域，A は R を含むクルル整域で，mA=A かつ R 上超越的とする。π は 0 でない m の元とし，P は πA の極小素イデアルとする。このとき，A/P が R/(P∩R)上代数的なら，A/P は体である。

以上の準備の下で，次の定理を得た。

定理 4　(R,m)は剰余体 k の代数閉包が k 上有限拡大であるような２次元完備ネーター局所整域とし，A は R を含む整域とする。極大イデアル m の非零元πが存在して，A/πA はネーター整域であり，A は π-進位相について分離的で，さらに，πA∩R=πR とする。このとき，次が成り

立つ。
(i) $A/\pi A$ が $R/\pi R$ 上代数的かつ $mA\neq A$ ならば，A は R-加群として有限生成である。
(ii) A が R 上超越的なら，$A/\pi A$ は $R/\pi R$ 上超越的であるか，$mA=A$ である。
(iii) $A/\pi A$ が $R/\pi R$ 上代数的かつ $mA = A$ ならば，$A/\pi A$ は体である。さらに，$A[1/\pi]$ がネーター環なら，A もネーター環である。

(2) さらに今回得た定理およびこれまでの研究の結果得られた定理について，所与の条件が満たされないときは定理が成り立たないことを示す具体例を構成した。具体例を構成する準備として，次を示した。以下，X は不定元とする。

補題 5 R はネーター整域，π は R の素元，D は R を含む整域で，以下の条件を満たすとする。
(I) $D[1/\pi] = R[1/\pi][X]$
(II) πD は D の素イデアルで，$\pi D\cap R = \pi R$
(III) D の πD における局所化 $D_{(\pi D)}$ は離散付値環である。
このとき，次が成り立つ。
(i) D はクルル環である。
(ii) R が UFD なら D も UFD である。
(iii) p が R の素元なら，p は D の素元でもあり，$pR = \pi R$ または $pD_{(\pi D)} = D_{(\pi D)}$ が成り立つ。

補題 6 R は 2 次元正則局所環で，s，t は R の正則パラメーター系とする。M はトーションフリーな R-加群で t は(M/sM)-regular とする。このとき，M は R 上平坦である。

補題 7 R，π，D は条件(I)，(II)，(III)も含めて補題 2 と同じとし，$A=R[X]\cap D$ とおくとき，次が成り立つ。
(i) p が R の素元で $pR\neq \pi R$ を満たすなら，$pA=pR[X]\cap A$ が成り立つ。特に，p は A の素元である。
(ii) R が 2 次元正則局所環で π が正則パラメーターなら，A は R 上忠実平坦である。

以上の準備の下で次の例を構成した。

例 8 k は有理数体 Q の代数閉包とし，u,v は不定元として，$R=k[u,v]_{(u,v)}$ とする。n>0 に対し，$a_n = v^n/n!$ とおく。$x_0 = uX$ とし，n>0 に対し，

$$x_n = (x_{n-1} - a_{n-1})/u = (x_0 - a_0 - a_1u - \cdots - a_{n-1}u^{n-1})/u^n$$

とする。$D=R[x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ とするとき，次が成り立つ。
(i) $D[1/u]=R[1/u][X]$ である。
(ii) u は D の素元で，$uD\cap R=uR$ である。
(iii) $D/uD = R/uR$ であり，特に D/uD はネーター環で，$D/(u,v)D$ は体である。
(iv) $D_{(uD)}$ は離散付値環である。
(v) D はネーター環ではない UFD である。

例 8 は「R は完備」という条件を外すと定理 1 は一般に成立しないということを示している。次いで，例 8 に関連して多項式環のクルル部分環のネーター性について考察した。これについては，以前に採択された科研費の研究で，R が 1 次元ネーター整閉整域で，A が $R\subset A\subset R[X]$ を満たすクルル環なら A はネーター環であるという結果を示した（[③, Lemma 3.3]）。次の例は，R が 2 次元以上なら，たとえ完備正則局所環であっても，その結果は成り立たないことを示す反例である。

例 9 u，v は不定元として，$R=C[[u,v]]$ を複素数体 C 上の 2 変数形式的べき級数環とする。p_n を n 番目の素数とし，q_n とを p_1 から p_n までの積とする。$C[[u]]$ 上に v の q^n 乗根すべてを添加して得られる R の整拡大を S とする。$x_0:= uX$，$x_1:=(x_0^2 - v)/u$ とし，さらに n>1 に対し，

$$x_n = (x_{n-1}^{p_n} - x_{n-2})/u$$

とする。$D=R[x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots]$，$A=D\cap R[X]$ とおくとき，次が成り立つ。
(i) $D[1/u]=R[1/u][X]$
(ii) uD は D の高さが 1 の素イデアルである。
(iii) D/uD は S と同型であり，従って D/uD はネーター環ではない。
(iv) D はネーター環ではない UFD である。
(v) A はネーター環ではない $R[X]$ のクルル部分環である。

(3)　多項式ファイバー環に関しては、さらに次の補題を示した。

補題 10　R はネーター整域，$B=R^{[n]}$で A は B の retract とする。p は R の素イデアルとし，P=pA とする。このとき，次が成り立つ。ただし，k=k(P)とする。
(i)　P は A の素イデアルで，$P\cap R = p$ かつ ht(P) = ht(p)である。
(ii) $PB\cap A = P$ である。
(iii) $\mathrm{tr.deg}_k (A_P/PA_P)= \mathrm{tr.deg}_k\, k(P)=\mathrm{tr.deg}_R\, A$ が成立する。

この補題を利用して，海外共同研究者の Dutta と Gupta は次の結果を得た。

定理 11　R はネーター整域，A は R 上超越次元 1 の整域とする。このとき次は同値である。
(I) A はある m に対して $R^{[m]}$の retract である。
(II) A は R 上の $\mathbb{A}^1$-fibration である。

(4)　科研費研究課題に関連して，べき等元で生成された環の同型類の決定に関する研究も行い，以下のような成果を上げることができた。可換環 A のべき等元 e は，e=f+g，fg=0 を満たす 0 と異なるべき等元 f，g が存在しないとき原始的であるという。
　これに関して，まず，次の定理を示した。

定理 12　R は整域とする。R-加群としてトーションフリーであるような R-代数 A で，以下の 3 条件を満たすものは，R-同型を除いて一意的である。
(a) A は R 上べき等元で生成される。
(b) A は原始べき等元をもたない。
(c) A の R 上の階数は可算無限である。

この定理は R が体の場合にはすでに知られていて，その一般化になっている。さらに，定理の条件を満たす A の具体的 R_v を以下のように構成した。

Δを整域 R の可算個の直積とし，n>0 に対し，Δの元 v_n を，
　　　第 i 成分が，i が n を法として 1 と合同のときは 1，そうでないときは 0
であるような元とする。そして，R_v を R 上 v_1，v_2，...で生成されたΔの R-部分代数とする。すなわち，

$$R_v = R + Rv_1 + Rv_2 + \cdots + Rv_n + \cdots$$

定理 13　上で定義した R_v は定理 12 の 3 条件(a)，(b)，(c)を満たす。従って，定理 12 の 3 条件を満たす R-代数はすべて R_v と同型である。

次いで，定理 12 の条件を変えて，原始べき等元を有限個もつ場合について考察し，次を得た。

定理 14　R は整域とし，A は R-加群としてトーションフリーであるような R-代数で，以下の条件を満たすとする。ただし，n は与えられた正整数である。
(a) A は R 上べき等元で生成される。
(b) A は原始べき等元を n 個もつ。
(c) A の R 上の階数は可算無限である。
このような A は R-同型を除いて一意的で，$R^n\times R_v$ と同型である。

さらに進めて，べき等元を可算無限個もつ場合についても考察した。そのために，第 i 成分が 1 で他の成分が 0 であるΔの元を e_i とし，

$$R_e = R + Re_1 + Re_2 + \cdots + Re_n + \cdots$$

と定義した。また，原始べき等元で生成される A のイデアル I_A を導入し，A/I_A が R 上べき等元で生成され，R-加群としてトーションフリーになることを確認した。その上でまず，次を示した。

定理 15　$A=(R_e)^n$ とおくとき，A は次の 3 条件を満たす。
(a) A は R 上べき等元で生成される。
(b) A は原始べき等元を可算無限個もつ。
(c) A/I_A の R 上の階数は n である。

さらに，定理 15 の逆が成り立つこと，すなわち，べき等元を可算無限個もつ場合について，次の定理が成立することを示した。

定理 16　R は整域とし，A は R-加群としてトーションフリーであるような R-代数で，定理 15 の 3 条件を満たすとする。このような A は R-同型を除いて一意的であり，$(R_e)^n$ と同型になる。

(5)　上記の結果も含め，べき等元で生成された環に関する研究をまとめて査読付き論文として公表した。その際，査読者からの指摘で，定理 12 の新たな意味付けが明確となった。
　ブール代数 B の元 0≠x は「0≠y≦x ⇒ y=x」を満たすとき原子元と呼ばれる。ただし，y≦x は y=y∧x を意味する。
　次はブール代数の古典的な定理である。

定理 A　原子元をもたない可算無限濃度のブール代数はすべて同型である。

実は，定理 12 は，上のブール代数の古典的な定理と同値であることが判明した。その証明には Specker 代数と呼ばれるものの圏とブール代数の圏が同値であるという結果を用いる。定理 A 自体は，ふつうストーン双対を用いて，カントール集合の一意性に帰着させて証明するが，定理 12 は定理 A の新たな証明を与えたことにもなる。

＜引用文献＞
① T. Asanuma, Polynomial fibre rings of algebras over noetherian rings, Invent. Math. 87, (1987), 101--127.
② S. M. Bhatwadekar, A. K. Dutta and N. Onoda, On algebras which are locally A^1 in codimension-one, Trans. Amer. Math. Soc. 365, (2013), 4497--4537.
③ A. K. Dutta and N. Onoda, Some results on codimension-one A^1-fibrations, J. Algebra 313, (2007), 905--921.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Inoue Kazuyo、Kawai Hideyasu、Onoda Nobuharu	４．巻 -
２．論文標題 Isomorphism classes of commutative algebras generated by idempotents	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	６．最初と最後の頁 2150008～2150008
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219498821500080	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Dutta Amartya Kumar、Gupta Neena、Onoda Nobuharu	４．巻 560
２．論文標題 On finite generation of Noetherian algebras over two-dimensional regular local rings	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Journal of Algebra	６．最初と最後の頁 241～265
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2020.05.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計1件

１．著者名 Shigeru Kuroda, Nobuharu Onoda, Gene Freudenburg	４．発行年 2020年
２．出版社 Springer	５．総ページ数 315
３．書名 Polynomial Rings and Affine Algebraic geometry	

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考