様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　　５ 月 ２０ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５０９９

研究課題名（和文）極小モデルプログラムの特異点論

研究課題名（英文）Singularities in the minimal model program

研究代表者
川北　真之（Kawakita, Masayuki）

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：１０３７８９６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：　非特異曲面上の極小対数的食違い係数は重み付き爆発で得られる因子によって計算されることを証明した．また，極小対数的食違い係数を計算する因子は対数的標準閾も計算するかという問題に対して，非特異曲面上で反例を与えて否定的に解決した．
　3次元非特異代数多様体上の極小対数的食違い係数の昇鎖律を，境界が標準特異点を定める部分と極大イデアルのべきに分解する状況に帰着させた．さらに，極大イデアルの対数的標準閾が1/2以下または1以上の場合に，極小対数的食違い係数を計算する因子の有界性を証明した．特に極小対数的食違い係数が1のところの昇鎖律が示された．

研究成果の学術的意義や社会的意義
　代数多様体とは，連立多項式の共通零点集合として定義される図形です．高次元の代数多様体の分類においては，特異点の制御が欠かせません．私は極小対数的食違い係数と呼ばれる特異点の不変量を研究しました．いったい何がその不変量を決定するのか，よく分かっていませんでしたが，私は2次元の場合に満足のいく結果を得ました．また，極小対数的食違い係数の重要な予想である昇鎖律予想を，なめらかな3次元代数多様体上で考察しました．

研究成果の概要（英文）：　I proved that the minimal log discrepancy on a smooth surface is computed by the divisor obtained by a weighted blow-up. I solved negatively the question of whether a divisor computing the minimal log discrepancy computes a log canonical threshold, by providing a counter-example on a smooth surface.
　I reduced the ascending chain condition (ACC) for minimal log discrepancies on a smooth threefold to the case when the boundary is decomposed into a canonical part and the maximal ideal to some power. Moreover, I proved the boundedness of a divisor computing the minimal log discrepancy when the log canonical threshold of the maximal ideal is either at most one-half or at least one. In particular, I obtained the ACC at minimal log discrepancy one.

研究分野：代数幾何学

キーワード：極小対数的食違い係数　昇鎖律　標準特異点　重み付き爆発

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

双有理幾何学とは，双有理変換で写り合う多様体どうしは性質を共有するという見地から代数多様体を研究する学問である．極小モデル理論は，各双有理同値類を代表する多様体を標準因子の比較によって抽出する理論であり，現在，極小モデルプログラム(MMP)として定式化されている．対象を代数多様体と因子の組へと拡げる拡張操作は対数化と呼ばれ，対数化された MMP が対数的極小モデルプログラム(LMMP)である．

LMMP が機能するためには，フリップの存在とフリップ列の終止が必要となる．3 次元では森が本来のフリップの存在を示して MMP を機能させ，その後 Shokurov らの努力によって 3 次元 LMMP は完成した．近年 Birkar，Cascini，Hacon，McKernan は境界因子が巨大であるときの LMMP を機能させて一般次元でフリップの存在を証明し，高次元 LMMP は大きな進歩を遂げた．現在ではフリップの終止予想が最重要な課題となっている．

２．研究の目的

私の当面の研究目標は，終止予想の視点からの，LMMP の過程で現れる特異点の構造の解明である．LMMP は対数的標準因子の比較に支障をきたさない特異点を許容するが，LMMP に現れる特異点は極小対数的食違い係数と呼ばれる不変量によって定義される．極小対数的食違い係数は，高次元ではその定義以上の性質はほとんど分かっていない．私が掲げる特異点の研究対象とは極小対数的食違い係数である．

極小対数的食違い係数を研究する動機は，フリップの終止予想が Shokurov によって極小対数的食違い係数についての二つの局所的な問題に帰着されているからである．一つは，極小対数的食違い係数の集合の昇鎖律であり，もう一つは，多様体の閉点上の極小対数的食違い係数の下半連続性である．

３．研究の方法

極小対数的食違い経数の昇鎖律を 3 次元において追究する．

(1)　特に対象を非特異多様体に限定して考える．多様体の非特異点における形式的近傍は形式的べき級数環に付随する空間と同型になるから，Kollár と de Fernex，Ein，Mustaţă によって，イデアルの列の極限を形式的べき級数環上に構成することができる．これをイデアルの生成極限と呼ぶ．生成極限の定める極小対数的食違い係数は元のイデアルたちの定める極小対数的食違い係数の極限となることが予想され，これから極小対数的食違い係数の昇鎖律が導かれる．3 次元非特異多様体上の 1 より大きい極小対数的食違い係数については，私が上の予想を示して昇鎖律を証明しているので，その議論を推し進める．

具体的には，生成極限の定める組が曲線に沿って対数的標準特異点を持つ場合が，3 次元において未解決である．対数的標準特異点とは，極小対数的食違い係数 0 以上の特異点である．穏やかな特異点を定めるイデアルから出発しても，その極限は悪い特異点を定めるイデアルとなり得るのである． 類似の状況として，生成極限の定める組が曲面に沿って対数的標準特異点を持つ場合は，極小対数的食違い係数を計算する因子はその曲面上に自然に導入される組の極小対数的食違い係数を計算する因子に制限されて現れるという，逆同伴の理論が私の証明の鍵となっている．曲線に沿って対数的標準特異点を持つ場合も，逆同伴による解決が可能であると考える．

(2)　一般の 3 次元多様体上の極小対数的食違い係数の昇鎖律を考察するときは，極小対数的食違い係数 1 未満の特異点が本質的な対象である．そこで Birkar，Cascini，Hacon，McKernan の LMMP を走らせれば，極小対数的食違い係数を計算する因子は爆発写像の例外因子として幾何的に実現される．ところが対数的標準因子を例外因子に制限するには，例外因子の係数が 1 である形の対数的標準因子で考えなければならない．よって，もとの特異点に適当な境界を付加して真に対数的標準な特異点を構成して，そのとき例外因子が依然として対数的標準閾を計算することが要請される．この動機から，極小対数的食違い係数を計算する因子は適当な対数的標準閾を計算するか，という問いに取り組む．

(3)　極小対数的食違い係数を計算する因子の性質は，ジェット空間の解析によっても研究できる．Mustaţă らの記述によれば，その因子の情報は，境界に関して一定の重複度を有するジェット空間の部分空間の情報に内包されている．ジェット空間の幾何的構造を捉えることによって，その重複度を制御したい．

４．研究成果

(1)　極小対数的食違い係数を計算する因子の性質を研究した.

①　非特異曲面上の極小対数的食違い係数を計算する因子を完全に決定した. 正確に述べると, 特異点が対数的標準である場合, そのような因子はすべて重み付き爆発で得られることを証明した. また, 特異点が対数的標準でない場合はそのような因子は無限にあるが, 少なくとも一つはやはり重み付き爆発で得られることを証明した.
　証明の方法は, 因子の中心に沿う爆発を続けて得られる例外因子のうち, 重み付き爆発の範疇に入る最上空のものに着目するシンプル方法である. 対応する重み付き爆発をさらに爆発させて得られる因子が極小対数的食違い係数を計算するならば, 特異点が対数的標準性から外れてしまうのである. なお, この重み付き爆発による特徴付けは 3 次元以上では成立しないことは, 私が反例を挙げたように, 簡単に分かる.

②　特異点の境界を増やしてちょうど対数的標準な特異点を構成して, 極小対数的食違い係数より調べやすい不変量である対数的標準閾の性質を用いることは, 極小モデル理論の標準的な手法である. この視点に立てば, 極小対数的食違い係数を計算する因子は境界を上手に増やすことで対数的標準閾も計算するのか, という疑問が生じる. この問題に対して, 非特異曲面上で反例を与えて否定的に解決した.

(2)　3 次元非特異代数多様体上で境界イデアルの指数が降鎖律を満たすときの極小対数的食違い係数の昇鎖律問題を研究した.

①　多様体を非特異なものに限定する場合, Kollár と de Fernex, Ein, Mustaţă の構成に従って, イデアルの生成極限を考えることができる. 私は既に極小対数的食違い係数が 1 より大きい場合の昇鎖律を証明しているが, 生成極限を用いる最大の困難は, 極限が特異点の極限にあたる性質を持つところである. 一方で Mustaţă, 中村の指摘する通り, 生成極限を介することで昇鎖律はイデアル進半連続性や極小対数的食違い係数を計算する因子の有界性などの重要な諸性質と同値になることがわかる. 今回私の採った手法は, 係数を計算する因子の多様体自身に関する食違い係数の有界性を研究するものである.
　私は, 極小対数的食違い係数が 1 以下のとき, 非特異点に収縮する 3 次元因子収縮写像の私の分類を用いて得られた Stepanov の標準閾の昇鎖律を出発点とした. 極小対数的食違い係数を計算する因子の中心に沿う適当な爆発を繰り返していくと, 川又と私の 3 次元因子収縮写像の分類結果によって, 境界イデアルが標準特異点を構成する部分と閉点にコサポートを持つ部分の積になる状況へ帰着された. 続いて, 非特異曲面上の極小対数的食違い係数を計算する因子の私の特徴付け, および 3 次元形式的べき級数環上の精密逆同伴を応用して, それが標準特異点を構成する部分と指数付き極大イデアルの積になる場合へ帰着した.

②　さらに, 境界が標準特異点を定める部分と極大イデアルのべきに分解する状況において, 極大イデアルの対数的標準閾が 1/2 以下または 1 以上の場合に, 極小対数的食違い係数を計算する因子の食違い係数の有界性を証明した. 閾が 1 以上のときは簡単で, 私の 3 次元形式的べき級数環上の連結性補題の結果によって, 生成極限の極小対数的食違い係数が 1 の場合のみを議論すればよい. 一方で閾が 1/2 以下のときは, 生成極限が曲線に沿って対数的標準特異点を持つ場合において, 精密逆同伴によって曲面上の議論に問題を還元させた. そのうえで, 非特異曲面上の極小対数的食違い係数を計算する因子の重み付き爆発による私の特徴付けの証明方法を応用した.
　この有界性によって, 特に極小対数的食違い係数が 1 のところの昇鎖律が示されたことになる. 残された場合は, 標準特異点を計算するすべての因子に沿って極大イデアルが重複度 1 を持つときであり, その幾何的な意味を調べた.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１件）

① <u>Masayuki Kawakita</u>,
Divisors computing the minimal log discrepancy on a smooth surface,
Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **163**, No. 1, 187-192 (2017), refereed
DOI: 10.1017/S0305004116001043

〔学会発表〕（計４件）

① Masayuki Kawakita,
Divisors computing the minimal log discrepancy,
"Conference on moduli and birational geometry V",
Haevichi Resort, S Korea, 16 December 2016

② Masayuki Kawakita,
Divisors computing the minimal log discrepancy,
Edge days 2017 "Birkar's boundedness and Cremona groups",
University of Edinburgh, UK, 30 June 2017

③ Masayuki Kawakita,
Minimal log discrepancies on smooth threefolds,
16th affine algebraic geometry meeting,
Kwansei Gakuin University, Japan, 9 March 2018

④ Masayuki Kawakita,
Minimal log discrepancies on smooth threefolds,
"Higher dimensional algebraic geometry",
University of Tokyo, Japan, 12 March 2018

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

ホームページ
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~masayuki

６．研究組織

(1)研究分担者
なし

(2)研究協力者
なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。