様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１６４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2020
課題番号：１６Ｋ０５１０３

研究課題名（和文）偏極多様体の不変量による随伴束の大域切断のなす次元についての研究

研究課題名（英文）Study on the dimension of the global sections of adjoint bundles for polarized manifolds via their invariants

研究代表者
福間　慶明（Yoshiaki, Fukuma）

高知大学・教育研究部自然科学系理工学部門・教授

研究者番号：２０３０１３１９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：複素数体上定義された非特異射影多様体Xとその上の豊富なカルティエ因子Lとの組(X,L)を偏極多様体とよぶ．偏極多様体の随伴束K+tL（ただし，KはXの標準因子，tは正整数）の大域切断のなす次元に関する研究についておこなった．特に「n次元偏極多様体(X,L)に対してK+(n-1)Lがネフであるとき，K+(n-1)Lの大域切断のなす次元は正となる」という予想を中心に，これに関係する話題について研究をおこなった.いくつかの特別な場合に対して上記予想が成り立つことや随伴束の大域切断の次元に関する研究，そして偏極多様体の不変量に関する研究成果をあげることができた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
偏極多様体の随伴束は，射影多様体の研究においていろいろな場面で使われており，射影多様体の分類や高次元代数幾何学の研究においてとても重要な役割を果たしている．偏極多様体の随伴束の持つ性質に関する研究については，例えば基点自由性に関する研究があり，いわゆる藤田予想といわれる予想の解決に向けた研究成果が高次元代数多様体論の研究に大きな役割を果たしていることを考えると，随伴束の大域切断のなす次元に関する研究が今後の代数幾何学、特に偏極多様体のさらなる研究に活かされていくことが大いに期待される．

研究成果の概要（英文）：Let X be a smooth projective variety defined over the field of complex numbers and let L be an ample Cartier divisor on X. Then the pair (X,L) is called a polarized manifold. We conducted studies on the dimension of the global sections of adjoint bundles K+tL, where K denotes the canonical divisor of X and t is a positive integer. In particular, we studied the following conjecture and its related topics: Let (X,L) be an n-dimensional polarized manifold. If K+(n-1)L is nef, then the dimension of the global sections of K+(n-1)L is positive. Consequently we obtained that the above conjecture is true for some special cases. We also were able to achieve some research results about the dimension of the global sections of adjoint bundles and invariants of polarized manifolds.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数学　代数幾何学　偏極多様体　豊富な因子　随伴束　nefかつbigな因子

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

## １．研究開始当初の背景

X を n 次元非特異射影多様体, L を X 上の豊富な因子とする. このとき, 組(X,L)を偏極多様体とよぶ. 1980 年代後半に藤田隆夫氏や Ionescu 氏により, 端射線理論を用いた随伴束 K + tL のネフ性に関する研究がなされて以降, Beltrametti 氏と Sommese 氏などによる随伴束の研究が急速に進んだ. ここで K は X の標準因子を表す. また一般に, X 上のカルティエ因子 D がネフであるとは, X 上の任意の曲線 C と D との交点数が 0 以上となるときをいう. 随伴束を用いることにより偏極多様体の性質が色々とわかりはじめ, 随伴束の研究の重要性が認知されるようになっていった. さらに随伴束についてはその基点自由性などについても詳しく調べられた. その研究を推し進めたのがいわゆる藤田予想といわれる予想であった. そのような状況の中, 1990 年に Ionescu 氏は随伴束の大域切断の次元について次の予想を提出した.

(予想 1) 偏極多様体 (X, L) に対して, K+L がネフならば K+L の大域切断のなす次元は正である.

この（予想 1）についてはその後, X が特異点を持つ場合にまで拡張されている (Ambro-川又予想). さらに, 1995 年になって Beltrametti 氏と Sommese 氏により次の予想が提出された.

(予想 2) 【Beltrametti-Sommese 予想】n 次元偏極多様体(X, L)に対して, もし K+(n−1)L がネフなら K+(n-1)L の大域切断のなす次元は正となる.

ここで (予想 1) が正しいならば (予想 2) も正しいことに注意する.

さて, 1 次元や 2 次元偏極多様体に関しては (予想 1)と(予想 2) が正しいことは比較的簡単に証明される. しかし 3 次元以上の場合はとても難しく, (予想 2) でさえ証明ができていなかった. 2006 年出版の論文において本研究代表者が 3 次元の場合に (予想 2) が正しいことを証明した. これをきっかけに, (予想 1) や (予想 2) に関する研究が活発になった. 特に Höring 氏により, 一般次元で L が大域切断を持つとき (予想 2)が正しいことが示された. またこの結果を用いて 4 次元の場合についても本研究代表者により (予想 2) が正しいことが示された. さらに Höring 氏は 3 次元の場合に（予想 1）が正しいことも示した.

また, この (予想 2) が正しければ K+(n-1)L の大域切断のなす次元の値により(X,L)を分類することができるのではないかと期待されるが, 3 次元の場合には K+2L の大域切断のなす次元が 2 以下となるような(X,L)の分類が完成し, さらに 4 次元の場合は K+3L の大域切断のなす次元が 1 以下となるような(X,L)の分類が完成した. これらの分類結果は, 研究が行われる以前においては予想すらできなかった結果であり, 今後の随伴束の大域切断のなす次元に関する研究の大きな一歩となった.

一方で, 本研究代表者により次の問題が提出された.

(問題) n を固定された正整数とする. K+L の小平次元が 0 以上となる任意の n 次元偏極多様体 (X, L) に対して, m(K+L)が大域切断を持つような最小の正の整数 m を求めよ.

この問題については, まず手始めに設定を少し限定して, K+L がネフの場合に m(K+L)が大域切断を持つような最小の正整数 m について考察を行った. (ここでもし K+L がネフであれば K+L の小平次元は 0 以上になることがわかることに注意する.) このような設定の下で上記の予想に関する研究を参考にして研究を進めた結果, m の値が n の一次式で上から抑えられることが本研究代表者により証明された.

以上のように, 随伴束の大域切断のなす次元の研究が現在急速に進展している.

## ２．研究の目的

上記の研究背景を踏まえ, 次のことを期間内に調べて成果を出すことを目標にした.

(課題 1) $n \geq 5$ に対して (予想 2) が正しいかを調べる.

そして, (予想 1)に関連して, 以下の課題に取り組むこととした.

(課題 2) K+L がネフであり, かつ X が n 次元の場合に m(K+L)が大域切断を持つときの最小の正整数の m の上限を改良できるかについて調べる. さらに上記（問題）での設定で m の上限について調べる.

また, 一般に (予想 1)を解決することは困難であることが想定されるため, (予想 2) の観点から考えて, 次の課題について調べることとした.

(課題 3) K+ (n − 2)L がネフのとき, K+(n-2)L の大域切断のなす次元が正となるかを調べる.

## ３．研究の方法

まず随伴束の大域切断の次元に関する考察を進めていく方法の一つとして以下の方法がある：一般に随伴束の大域切断のなす次元は偏極多様体の不変量である断面幾何種数なるものを用いて表すことができる.断面幾何種数とはいわゆる多様体の不変量である幾何種数の偏極多様体版である.古典的な不変量である豊富な因子 L の次数(L の自己交点数)や断面種数は断面幾何種数の特殊な場合であり，第 0 断面幾何種数が次数であり，第１断面幾何種数が断面種数となる.断面幾何種数の性質を調べることで随伴束の大域切断の次元の性質を調べることもでき， 上記で挙げた X の次元 n が 4 以下の場合の偏極多様体の随伴束 K+(n-1)L の大域切断の次元の値による(X,L)の分類はこの断面幾何種数の持つ性質を用いることにより考察可能となっている.

また，上記（問題）に関して K+L がネフであり，かつ m(K+L)が大域切断を持つような最小の正整数 m を求めるときには,多重偏極多様体の断面幾何種数での考察が有効である.随伴束 K+L がネフのとき，m(K+L)の大域切断のなす次元について考察する場合には多重偏極多様体の断面

幾何種数を用いた議論が有効であることがわかっている．したがってこの多重偏極多様体の断面幾何種数に関する性質の研究も大切となってくる．

さらに研究方法として考えられるのが Höring 氏が Beltrametti-Sommese 予想の研究を行った際に用いた方法である.そこの証明の中で用いられている方法を精査し工夫を加えることで随伴束の大域切断の次元に関する評価をよりよくできる可能性がある.この際に問題となるのが X の第 2 Chern 類とネフかつ巨大な因子との交点数の下限についてである.これをいかにして克服するかが問題となる．

上記の第 2 Chern 類とネフかつ巨大な因子との交点数の下限の議論を避ける方法としては以下の方法もある．t を正の整数とし,X の不正則数が正の場合，X の Albanese 写像を作ることができ,K+tL を X の Albanese 写像の一般ファイバー F に制限をしたものを考えたとき,K+tL を F に制限したもの $K_F+tL_F$ の大域切断のなす次元が正であることと K+tL の大域切断のなす次元が正であることが同値であることが Fourier-向井変換を用いた議論からわかる．これにより X の不正則数が正の場合では随伴束の大域切断の次元に関する研究は低次元の場合に帰着される．そこで X の不正則数が 0 の場合が問題となる．このときは Albanese 写像が作れないが，X の MRC-ファイブレーションをとることにより，X と双有理な非特異射影代数多様体 X’から uniruled でない非特異射影多様体 Y へのファイブレーションで一般ファイバーが有理連結な多様体となるものが存在することがわかる.これを用いて考察を与えることができると考えられる．このような特殊な場合に随伴束がどのような性質を持つかを調べることが重要となる．

## ４．研究成果

今回の研究の結果，以下のことが分かったので報告をする．

(1)X の次元 n が 5 の場合について（予想 2）を考察した．その結果，少し弱い結果であるが「もし K+4L がネフなら K+2L もしくは K+4L が大域切断を持つ」ことを示すことができた．これにより 2L が大域切断を持つ場合には n=5 の場合に(予想 2)が正しいことが言えたことになり,Höring の結果について 5 次元の場合に少し一般化できたことになる． これについて論文を作成・投稿して，学術雑誌に掲載された．

(2)3 次元多重偏極多様体(X,A,B)に対して随伴束 K+A+B の小平次元が 0 以上のとき，K+A+B の大域切断の次元は正となるが， この次元が 1 の時の(X,A,B)の分類をすることに成功した.この結果については，多重偏極多様体の断面種数に関する考察を行うことで証明が得られた.これについて論文を作成・投稿して，学術雑誌に掲載された．

(3)今までに与えられた予想を解決するための一つのステップとして別の予想･問題を提起した．具体的には、n 次元偏極多様体の随伴束 K+tL の大域切断のなす次元が 0 となるような正整数 t の個数による偏極多様体の特徴づけについての問題である.このような個数が n-1 以上のときの偏極多様体の分類について予想を与えた.これについては n が 4 以下の場合には今までに得られた結果からわかるが，n が 5 の時について考察し，予想を証明した．さらに次元 n が 6 以上の場合， n+1 以上の任意の整数 t に対して偏極多様体の随伴束 K+tL の大域切断のなす次元が正であるならば分類ができることを示した．

(4)n 次元非特異射影多様体 X 上の大域切断で生成される階数 n-2 の豊富なベクトル束 E に対しては，その断面不変量である Cr-断面 Hodge 数と Cr-断面 Betti 数の値は 1 以上になるが，その値がちょうど 1 になる時の(X,E)の分類に成功した.これについては論文を作成・投稿して学術雑誌に掲載された．

(5)随伴束の大域切断の次元や偏極多様体の断面不変量を考察するための手法として Newton-Okounkov 凸体の理論が使えないかについて研究を進めた． その結果， Newton-Okounkov 凸体の理論を用いて偏極多様体の不変量であるΔ-種数の下限の値に関する研究に応用できることに気づき，それに関して考察した．特に 2 次元の場合について詳しく調べ，Δ-種数の非負性の別証明などを与えることができた． 考察した結果についての論文を作成・投稿して， 学術雑誌に掲載された．

(6)一般次元の多重偏極多様体の断面種数の値が 1 以下となる場合の多重偏極多様体の分類に関する結果は得られていたが， 多重偏極多様体の断面種数の値が 2 となるものについての分類を完成させることができ， 論文を作成・投稿して，学術雑誌に掲載された． この研究により随伴束の大域切断の次元に関する研究がさらに進展する可能性が大きくなった．

(7)4 次元偏極多様体に関する随伴束の大域切断のなす次元に関する辻の問題について考察した．具体的には，t が正整数の時、K+(t+1)L と K+tL の大域切断のなす次元の差は 0 以上となるかについて，4 次元偏極多様体の場合に考察し、t が 2 以上の場合は正しいことを示した．これに関する論文を作成・投稿し，学術雑誌に掲載された．

(8)m が n+1 以上のとき，n 次元偏極多様体の随伴束 K+mL の大域切断のなす次元の下限について考察し，n=5 かつ L が大域切断を持つ場合に，6 以上の任意の整数 m に対して K+mL の大域切断のなす次元は(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)/5!以上になることを証明した．さらに K+mL の大域切断のなす次元がちょうど(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)/5!となるときの(X,L)の特徴づけに成功した.これに関する論文を作成・投稿して学術雑誌に掲載が決まった.

(9)n 次元非特異射影多様体 X の標準因子が数値的に自明であり，かつ L がネフかつ巨大な因子である場合に，m が n-3 以上の任意の整数に対して K+mL は大域切断を持つことを証明した.これにより X の標準因子が数値的に自明であり，かつ L がネフかつ巨大な因子である場合に Beltrametti-Sommese 予想が正しいことと（課題 3）の問いが正しいことを示すことに成功したことになる．これについて論文を作成・投稿して，学術雑誌に掲載されることが決まった．

(10)偏極多様体の不変量に関する応用として定義される半順序集合の不変量を用いて，順序を全く持たない集合について不変量を用いた特徴づけを行うことに成功した論文が受理され，掲載された．

(11)(X,L)が偏極多様体で，X の反標準因子がネフかつ巨大となる場合について考察した．その結果，X の次元が 9 以下であり，さらに X の反標準因子が大域切断を持つときに Beltrametti-Sommese 予想が成り立つことを示すことに成功した．上記結果については投稿中である．

最後に，今後の課題について触れておく.「3 次元多重偏極多様体(X,A,B)に対して随伴束 K+A+B の大域切断のなす次元が 2 の時の(X,A,B)の分類に関する研究について」と「n 次元偏極多様体(X,L)で L が大域切断を持つ場合に対し、K+nL の大域切断のなす次元が 2 となる(X,L)の分類の研究」については今回の研究で調べきれなかったので今後の研究として継続することとした．さらに，Beltrametti-Sommese 予想と「K+(n-2)L がネフとなるとき K+(n-2)L の大域切断のなす次元の値が正となるか」についての考察は，本研究においては X が特殊な場合について証明ができたが，今後も引き続いて考察を進めていきたい．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計8件（うち査読付論文　8件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　5件）

| | |
|---|---|
| 1．著者名<br>Yoshiaki Fukuma | 4．巻<br>65 |
| 2．論文標題<br>On the dimension of the global sections of $K_{X}+4L$ for polarized 5-folds $(X, L)$ | 5．発行年<br>2019年 |
| 3．雑誌名<br>ANNALI DELL'UNIVERSITA' DI FERRARA | 6．最初と最後の頁<br>231-240 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s11565-019-00322-5 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| 1．著者名<br>Yoshiaki Fukuma | 4．巻<br>48 |
| 2．論文標題<br>A generalization of $\Delta$-genus for big divisors on projective varieties | 5．発行年<br>2020年 |
| 3．雑誌名<br>Communications in Algebra | 6．最初と最後の頁<br>168-184 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1080/00927872.2019.1635609 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| 1．著者名<br>Yoshiaki Fukuma | 4．巻<br>48 |
| 2．論文標題<br>Classification of bi-polarized 3-folds $(X, L_{1}, L_{2})$ with $h^{0}(K_{X}+L_{1}+L_{2})=1$ | 5．発行年<br>2018年 |
| 3．雑誌名<br>Hiroshima Mathematical Journal | 6．最初と最後の頁<br>159-170 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.32917/hmj/1533088829 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| 1．著者名<br>Yoshiaki Fukuma | 4．巻<br>94 |
| 2．論文標題<br>A note on the dimension of global sections of adjoint bundles for polarized 4-folds | 5．発行年<br>2018年 |
| 3．雑誌名<br>Proceedings of the Japan Academy. Series A, Mathematical Sciences | 6．最初と最後の頁<br>53-58 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.3792/pjaa.94.53 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Yoshiaki Fukuma | ４．巻<br>39 |
| ２．論文標題<br>New invariants of ample vector bundles over smooth projective varieties | ５．発行年<br>2018年 |
| ３．雑誌名<br>Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. Serie VII | ６．最初と最後の頁<br>97-131 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Yoshiaki Fukuma | ４．巻<br>62 |
| ２．論文標題<br>A note on classification of generalized polarized manifolds by the Cr-sectional Hodge number of type (1,1) and the Cr-sectional Betti number. | ５．発行年<br>2017年 |
| ３．雑誌名<br>Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees | ６．最初と最後の頁<br>529-535 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Yoshiaki Fukuma | ４．巻<br>31 |
| ２．論文標題<br>On invariants of polynomial functions, II | ５．発行年<br>2021年 |
| ３．雑誌名<br>Algebra and Discrete Mathematics | ６．最初と最後の頁<br>71-83 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.12958/adm1319 | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著<br>－ |

| | |
|---|---|
| １．著者名<br>Yoshiaki Fukuma | ４．巻<br>60 |
| ２．論文標題<br>Classification of multi-polarized n-folds of sectional genus two | ５．発行年<br>2019年 |
| ３．雑誌名<br>Beitrage zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry | ６．最初と最後の頁<br>95-109 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s13366-018-0401-y | 査読の有無<br>有 |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著<br>－ |

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

| |
|---|
| 1．発表者名<br>Yoshiaki Fukuma |
| 2．発表標題<br>On the dimension of the global sections of adjoint bundles for polarized manifolds |
| 3．学会等名<br>Algebraic surfaces and related topics（招待講演）（国際学会） |
| 4．発表年<br>2019年 |

| |
|---|
| 1．発表者名<br>福間　慶明 |
| 2．発表標題<br>偏極多様体の随伴束の大域切断のなす次元について～予想・問題と現在までの結果 |
| 3．学会等名<br>日本数学会　中国・四国支部例会 |
| 4．発表年<br>2019年 |

| |
|---|
| 1．発表者名<br>福間　慶明 |
| 2．発表標題<br>5次元偏極多様体の随伴束の大域切断のなす次元に関する考察 |
| 3．学会等名<br>日本数学会　年会 |
| 4．発表年<br>2019年 |

| |
|---|
| 1．発表者名<br>福間　慶明 |
| 2．発表標題<br>偏極多様体の随伴束の大域切断のなす次元に関する諸問題について |
| 3．学会等名<br>九州大学代数幾何学セミナー |
| 4．発表年<br>2017年 |

| |
|---|
| 1．発表者名<br>福間　慶明 |
| 2．発表標題<br>偏極多様体の随伴束の大域切断のなす次元に関する話題 |
| 3．学会等名<br>代数学ミニシンポジウム2017（倉敷） |
| 4．発表年<br>2017年 |

| |
|---|
| 1．発表者名<br>福間　慶明 |
| 2．発表標題<br>偏極多様体の随伴束の大域切断のなす次元について |
| 3．学会等名<br>日本数学会年会 |
| 4．発表年<br>2018年 |

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

| | 氏名<br>（ローマ字氏名）<br>（研究者番号） | 所属研究機関・部局・職<br>（機関番号） | 備考 |
|---|---|---|---|

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---|---|