3版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　９ 月 １８ 日現在

機関番号：３２６４１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５１０６
研究課題名（和文）ヒッグズ層の代数理論とその応用

研究課題名（英文）Algebraic theory of Higgs sheaves and its applications

研究代表者
宮岡　洋一（Miyaoka, Yoichi）

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：５０１０１０７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：ヒッグス束の初等的・純代数的理論の構築に取り組み、以下を証明した。1) ベクトル束作用をもつ層の半安定性が高次数一般超曲面制限で保たれるという Mehta-Ramanathan 型定理　2) ベクトル束の可積分作用をもつ層の半安定性がテンソル積で保たれるというテンソル積保存定理　3) 接束の可積分作用をもつ半安定層（半安定 Higgs 層）のチャン類に対する Bogololov 不等式。これらの結果により，微分方程式やホッジ理論に依存していたヒッグス層の理論を、純粋に代数幾何的な方法により再構成した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
理論物理から生まれたヒッグス層は、微分方程式論、微分幾何学、代数幾何学など、純粋数学のさまざまな分野においても重要な役割を果たしつつある。しかしながら従来のヒッグス層理論は、ゲージ理論、すなわち非線形偏微分方程式論　(C. Simpson, T. Mochizuki) や、 p 進ホッジ理論 (A. Langer) といった大道具を用いており、きわめて難解なものであった。われわれの研究はヒッグス層の基礎理論に明快かつ初等的な枠組みを与え、見通しをよくするものである。

研究成果の概要（英文）：We tried to construct an elementary and purely algebraic theory of Higgs sheaves. We proved the following three results: 1) Mehta-Ramanathan theorem which asserts that the semi stability of a sheaf with an action of a vector bundle is preserved by restriction to general hypersurfaces of high degree, 2) Tensor product theorem to the effect that the tensor product of two semistable sheaves with integral actions of a bundle is again semisgtable, and 3) the Bogomolov inequality for the 1st and 2nd Chern classes of a semistable Higgs sheaf (a sheaf with an integrable action of the tangent bundle). These results shed a new light on, and give a reconstruction of, the theory of Higgs sheaves in terms of pure algebraic geometry.

研究分野：代数幾何学

キーワード：可積分作用つき層　ヒッグス層　Mehta-Ramanathan 型制限定理　テンソル積保存定理　Bogomolov 不等式

1. 研究開始当初の背景

(1) ヒッグス層は素粒子の場の理論から生まれた。元来はリーマン面上のベクトル束の接続のモジュライ空間を表現するため導入された概念である。一般の複素多様体においてヒッグス層を定式化し、非可換ゲージ理論を展開して基本理論を構成したのは C. Simpson である。主要結果は安定ヒッグス束上の標準的「調和計量」の存在定理である。Simpson 理論は望月拓郎の一連の成果により微分方程式論の立場からさらに大きな発展をとげ、一般化された Riemann-Hilbert 対応（柏原予想）として結実した。一方 A. Langer は正標数への特殊化と p 進ホッジ理論によってヒッグスに対する新しい視点を与えた。

(2) 以上のヒッグス層理論においてもっともめざましい成果の一つは、ヒッグス層として半安定であれば，通常の層として不安定であっても、その第１・第２チャン類の間に Bogomolov (-Gieseker) 不等式が成立するというもので，この結果から一般次元の Miyaoka-Yau 不等式が従うのである。ここで注意すべきは Simpson, 望月, Langer のいずれの結果も、本質的に微分方程式、すなわち無限小解析（もっと具体的には積分可能な接続形式の存在）に依存していることである。

2. 研究の目的

(1) 本研究ではヒッグス層の理論の基礎的部分を微分方程式から解放し、初等化・代数化すること、特にヒッグス束に対する Bogomolov 不等式の純粋に代数幾何的な証明を与えることを目標とした。その背後には Bogomolov 不等式および Miyaoka-Yau 不等式の根本は基本的・初等的であるはず、という確信がある。

(2) 代数化の第一段階は定義の形式化である。そのため層に対するベクトル束の作用と，その作用の積分可能性を定義した。すなわちベクトル束のある層への作用とは，このベクトル束が生成するテンソル代数から層の自己準同型環へ向かう，多様体の関数環代数としての準同型のことであり，作用が可積分であるとは，この準同型が対称テンソル代数を経由すること、すなわち準同型の像が可換部分環となることである。ヒッグス層は接束の可積分作用をもつ層である。このような定式化をする利点は、実例をたくさん作れることである。たとえばリーマン面、あるいはリーマン面の線形ペンシル（射影直線をパラメータとするリーマン面の族）上に標準ヒッグス束（接束の対称テンソル代数）とその普遍変形ヒッグス束、あるいは標準相対ヒッグス束（相対接層の対称テンソル代数）とその普遍変形ヒッグス束が構成できる。

3. 研究の方法

(1) この研究で用いる方法は一種の摂動法である。すなわち与えられた半安定 Higgs 層の一般の微小変形をとることにより，通常の層として半安定にするという方針である。

(2) この方針は Riemann 面の上では証明できるが，曲面になるとそのままの形では実行できないので、もとの Higgs 層を少しだけ改変することによって，上記の変形操作を行うことができる。

4. 研究成果

(1) 本研究で得られた主要結果は以下の３つの定理である。

a) 射影多様体上、ベクトル束作用をもつ層が（Harder-Narasimhan の意味で）半安定なら，十分次数の高い一般の超曲面切断への制限も半安定である（Mehta-Ramanathan 型定理)。

b) ベクトル束の可積分作用をもつ２つの半安定層があれば、そのテンソル積もまた半安定である（テンソル積定理)。

c) 半安定なヒッグス層の第１・第２チャン類に対して Bogolov 不等式が成立する。したがって（辻元による余接束の安定性に関する結果を併用すると）一般次元の一般型多様体に対して Miyaoka-Yau 不等式が成り立つ。

以上の結果により、ヒッグス層の基礎理論の初等化・純代数化がほぼ達成されたことになる。これらの結果について証明の方針を簡単に説明する。

(2) Mehta-Ramanathan の証明は通常の半安定層に対するものと同様である。

(3) テンソル積の半安定性を示すには、まず Mehta-Ramanathan により問題をリーマン面上の層に還元し，この場合標準ヒッグス束の一般の変形と問題となっている層を標準ヒッグス束上の加群とみなし、標準ヒッグス束上のテンソル積をとると，作用を考えない通常のベクトル束として半安定になることを用いる。この対応によりヒッグス束として半安定であることと、一般のヒッグス変形が通常のベクトル束として半安定であることが同値になる。

(4) Bogomolov 不等式については a) により射影直線上の曲線族上の問題に帰着し，もとの Higgs 層を含み、かつ有限個の点以外では一致するような Higgs 層を相対ヒッグス層と考えたとき，これと標準相対ヒッグス層の一般変形とのテンソル積をとると通常の層として半安定にできることを証明する。一般変形が豊富に存在するためには作用するベクトル束が接束であることが本質的である。すなわち標準相対ヒッグス層の普遍変形族とは曲線の変形族に付随する Kodaira-Spencer 写像であり、その意味では標準的変形は（複素数上の）ホッジ理論の言い換えとも言える。注意すべきはもとの相対 Higgs 層は必ずしも変形をもたないことで、これをごくわずか膨らますことが必要である。通常の層として半安定になれば，その対称積に対する Riemann-Roch と第１コホモロジー群の次元の下からの評価（もとの層との差からくる寄与）を考えることによって求める不等式が従う。Miyaoka-Yau 不等式は接束と構造層の直和をヒッグス束とみなすことで得られる。

(5) これらの結果は結果そのものとしてはすでに知られたことであるが、証明のなかで

用いたテンソル積構成法は応用が見込まれる。以上の成果は１本の論文にまとめて学術雑誌に投稿する予定である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考