1版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 １１ 日現在

機関番号：３２６５７
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５１０７
研究課題名（和文）セミステイブルな対数的スムース退化上の混合ホッジ構造の研究

研究課題名（英文）A study of mixed Hodge structures for semisatable log smooth degenerations

研究代表者
藤澤　太郎（Fujisawa, Taro）

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：６０２８０３８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：射影的かつセミステイブルな対数的スムース退化の相対対数的ドラームコホモロジー群が自然な混合ホッジ構造を持ち、そのウェイトフィルトレーションが自然なべき零射のモノドロミー・ウェイトフィルトレーションと（適切なシフトの下で）一致すること、および混合ホッジ構造としての自然な偏極を持つことを証明した。
　さらに、相対対数的ドラーム複体と擬同型な複体上に新らたなフィルトレーションが定義され、それから定まるスペクトル系列がE_2項で退化することが証明できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究の成果の一つであるウェイトフィルトレーションとモノドロミー・ウェイトフィルトレーションが一致するという事実は、Green-Griffiths が彼等の論文の中で提出した問いの一部に対数幾何学の立場から肯定的に答えるものであり、対数的解析空間の混合ホッジ理論について一つの新しい知見を与えるものである。
　さらに、本研究で示されたスペクトル系列のE_2退化は、Green-Griffiths の問いへのより完全な解答に向けて重要な一歩となる。

研究成果の概要（英文）：I proved the following:
The relative log de Rham cohomology groups of a projective semistable log smooth degeneration carry natural mixed Hodge structures, whose wieght filtrations coincide with the monodromy weight filtration of certain natural nilpotent endomorphisms under appropriate shifts. Moreover, they admit natural polarization as mixed Hodge structures.
 In addition, I proved the E_2-degeneracy of the spectral sequence associated to another filtration on the complex quasi-isomorphic to the relative log de Rham complex of a projective semistable log smooth degeneration.

研究分野：代数幾何学

キーワード：混合ホッジ構造　対数幾何

1. 研究開始当初の背景

射影的かつセミステイブルな対数的スムース退化 $X \longrightarrow *^k$ （以下 X と略記する）について、その相対対数的ドラームコホモロジー群 $\mathrm{H}^q(X, \omega_{X/*^k})$ が（任意の $q \in \mathbb{Z}$ に対して）自然な混合ホッジ構造を持つことは、本研究代表者のそれまでの研究によって証明されていた。この自然な混合ホッジ構造のウェイトフィルトレーションを L で表す。

複素多様体から多重円板へのセミステイブルな射 $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \Delta^k$ の特異ファイバー $X = f^{-1}(0)$ は、適切な対数構造を用いることによりセミステイブルな対数的スムース退化になる。この意味において、セミステイブルな対数的スムース退化の概念は、セミステイブルな射の特異ファイバーを対数幾何学の立場から一般化したものであり、上述の相対対数的ドラームコホモロジー群 $\mathrm{H}^q(X, \omega_{\mathfrak{X}/*^k})$ は、セミステイブルな射の場合には、相対対数的ドラーム複体の f による順像 $R^q f_* \Omega_{\mathfrak{X}/\Delta^k}(\log X)$ の原点への引き戻し $\mathbb{C}(0) \otimes R^q f_* \Omega_{\mathfrak{X}/\Delta^k}(\log X)$ に一致する。

さらにセミステイブルな射の場合、$\mathbb{C}(0) \otimes R^q f_* \Omega_{\mathfrak{X}/\Delta^k}(\log X)$ には自然に k 個のべき単なモノドロミー同型射 $T_1, \dots, T_k$ が定まり、これらの対数としてべき零な射 $N_1 = \log T_1, \dots, N_k = \log T_k$ が定まる。それに対応して、セミステイブルな対数的スムース退化の場合にも、相対対数的ドラームコホモロジー群 $\mathrm{H}^q(X, \omega_{X/*^k})$ 上にべき零な射 $N_1, \dots, N_k$ を容易に構成することができる。（これらの射は、X がセミステイブルな射から得られる対数的スムース退化である場合には、上述のモノドロミー同型射の対数に一致する。）

一方、セミステイブルな対数的スムース退化において $k = 1$ としたものが、Steenbrink が定義したログ・デフォメーションの概念に他ならない。すなわち、セミステイブルなスムース退化は、Steenbrink のログ・デフォメーションを一般化した概念である。Steenbrink はログ・デフォメーションの概念を定義すると同時に、射影的なログ・デフォメーションの相対対数的ドラームコホモロジー群が自然な混合ホッジ構造を持ち、そのウェイトフィルトレーション L がべき零射 N から定まるモノドロミー・ウェイトフィルトレーション $W(N)$ と（適切なシフトの下で）一致すること（$L = W(N)$）を示していた。さらに本研究代表者は、Steenbrink の議論を精密化し、射影的なログ・デフォメーションの相対対数的ドラームコホモロジー群が混合ホッジ構造としての自然な偏極を持つことの証明に成功していた。

2. 研究の目的

射影的なログ・デフォメーションに関する前述の結果を、一般のセミステイブルな対数的スムース退化の場合へと一般化することが本研究の目的であった。

すなわち、射影的かつセミステイブルな対数的スムース退化の相対対数的ドラームコホモロジー群について、以下の二つを証明することが本研究の当初の目的であった。

(1) その混合ホッジ構造のウェイトフィルトレーション L と $N = N_1 + \cdots + N_k$ のモノドロミー・ウェイトフィルトレーション $W(N)$ とが適切なシフトの下で一致することを示す。（ここで $N_1, \dots, N_k$ は「研究開始当初の背景」の中で述べたべき零射である）

(2) 混合ホッジ構造としての自然な偏極を構成する。

さらにこれらの目的が達成された後には、

(3) 「局所不変サイクル定理」

を一般の射影的かつセミステイブルな対数的スムース退化に対して証明することも目的としていた。

3. 研究の方法

本研究を遂行する過程で用いた方法は主に以下の 2 つである。

(1) Steenbrink 型のコホモロジカル混合ホッジ複体 (A, L, F) で、X の相対対数的ドラーム複体 $\omega_{X/*^k}$ と擬同型になるもの（さらに詳しく述べれば、フィルトレーション F に関してフィルター付き擬同型になるもの）を構成する。

(2) 単体的複体 $\mathcal{C}$ およびその上の積構造とトレース射を構成し、（「同型」ではないものの）適切な比較射 $A \longrightarrow \mathcal{C}$ を構成する。

先述したように、適切なケーラー条件をみたす（必ずしもセミステイブルと仮定しない）コンパクトな対数的スムース退化の相対対数的ドラームコホモロジー群が自然な混合ホッジ構造を持つことは、本研究代表者のそれまでの研究によって証明されていた。しかし、その際に用いた方法は Steenbrink の方法の一般化ではなく、El Zein による単体的方法を一般化したものであった。（これは、必ずしもセミステイブルと仮定していないため、Steenbrink の方法を一般化することが容易では無いことによる。）

一方、$k=1$ とした場合にあたるログ・デフォメーションについて、その相対対数的ドラームコホモロジー群上で $L=W(N)$ を証明しさらに積や偏極を構成するためには、ウェイトスペクトル系列の E_1 項が比較的容易に計算できる Steenbrink 型の複体と、積やトレース射を定義するのに適した El Zein 型の単体的複体を同型射によって結び付け、二つの方法を上手く融合することで証明がなされていた。そこで、まずは (1) の Steenbrink 型複体の構成から始めた。

当初の構想では、Steenbrink 型の複体が構成できれば、ログ・デフォメーションに対する Steenbrink の手法をより一般の射影的かつセミステイブルな対数的スムース退化の場合に直ちに一般化することが可能で、容易に $L=W(N)$ という結果を得られるものと予想していた。しかし、その証明を詳細に検討したところ、実際には容易ではないことが明らかになった。証明の中でウェイトスペクトル系列の E_1 項に Guillen-Navarro Aznar の方法を適用する必要があるが、そのためには E_1 項に定まる双線型形式と E_1 項の間の射が「両立している（compatible）」ことを示す必要がある。$k=1$ の場合は E_1 項の間の射が Gysin 射と制限射を用いて簡単に記述されるためこの「両立性」を示すことは容易なのだが、一般のセミステイブルな対数的スムース退化においては、ウェイトスペクトル系列の E_1 項がかなり複雑になり、E_1 項の間の射も簡単には記述できないため、この「両立性」を示すことが容易ではない。

さらに検討を進めた結果、先に構成した複体 A 上に適切な積構造およびトレース射を構成することができれば、上記「両立性」の困難は克服できることが明らかになった。そこで、当初の計画を変更し、A 上に適切な積構造およびトレース射を構成することを直ちに試みた。

ログ・デフォメーションの場合の考察で明かにされていたように、積あるいはトレース射を構成するには、El Zein 型の単体的複体 K が適している。さらにログ・デフォメーションの場合には、Steenbrink 型複体 A から El Zein 型複体 K への同型射を構成して両者を結び付けることによって証明が機能していた。しかし同様の方法を一般のセミステイブルな対数的スムース退化に適用しようとした場合、単体的複体 K が非常に複雑になり、特にトレース射の定義や同型射 $A \longrightarrow K$ の構成は極めて困難であることが予想された。

引き続き考察を進めた結果、A と「同型」な単体的複体 K に代わる単体的複体 $\mathcal{C}$ およびその上の積構造とトレース射を構成し、（「同型」ではないものの）適切な比較射 $A \longrightarrow \mathcal{C}$ を構成できれば上述の「両立性」に関する困難も回避でき、同時に当初の目的である相対対数的ドラームコホモロジー群上の自然な偏極を構成することが可能であることが判明した。そこで (2) の方法を採用し、単体的複体 $\mathcal{C}$ と、その上の積およびトレース射の構成を行なった。

4.　研究成果

上述の 2 つの方法が上手く機能し、以下の成果を得ることができた。

X を射影的かつセミステイブルな対数的スムース退化とし、その相対対数的ドラームコホモロジー群 $\mathrm{H}^q(X, \omega_{X/*^k})$ を考える。

(1) 任意の $q \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{H}^q(X, \omega_{X/*^k})$ は自然な混合ホッジ構造を持ち、そのウェイトフィルトレーション L は、（適切なシフトの下で）$W(N)$ と一致する。

(2) 任意の $q \in \mathbb{Z}$ に対して、$\mathrm{H}^q(X, \omega_{X/*^k})$ は混合ホッジ構造としての自然な偏極を持つ。

研究開始当初は、上記 (1) および (2) はかなり独立に証明できるものと想定していたが、「研究方法」において述べたように、(1) を証明するためには (2) も同時に示さねばならないことが分った。その意味で上記 (1) および (2) は一体の研究成果として捉えるべきものであろう。現在論文を執筆中である。

上記 (1) は Green-Griffiths が、論文 “Deformation theory and limiting mixed Hodge structures” の中で挙げていた問いの一部に対して、対数幾何学の立場から肯定的に答えるものである。さらに、彼等が提出した問いに完全に答えるためには、任意の部分集合 $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ に対してモノドロ

ミー・ウェイトフィルトレーション $W(N_I)$ を考察しなければならない。（ここで N_I は $N_I=\sum_{i\in I}N_i$ で定義されるべき零射である。）これに関連して、本研究を遂行する過程で次の成果も得られた。

(3) 任意の部分集合 $I\subset\{1,2,\ldots,k\}$ に対して Steenbrink 型複体 A 上にフィルトレーション $L(I)$ が定義され、それから定まるスペクトル系列が E_2 項で退化することが証明された。

A 上のフィルトレーション $L(I)$ は相対対数的ドラームコホモロジー群上にフィルトレーション $L(I)$ を定めるが、これらが如何なる性質を持つかを調べる際に、上記 (3) で述べたスペクトル系列の E_2 退化が基本的かつ重要な役割を果すことが予想される。より具体的には、フィルトレーション $L(I)$ がモノドロミー・ウェイトフィルトレーション $W(N_I)$ と（適切なシフトの下で）一致することが予想され、それを証明するために (3) の E_2 退化は必要不可欠な結果であると考えられる。その意味で（当初想定していなかったが）上記 (3) は重要な研究成果であると言える。

一方、本研究において射影的かつセミステイブルな対数的スムース退化の相対対数的ドラームコホモロジー群上に構成された混合ホッジ構造は、（「研究開始当初の背景」で述べた）本研究以前に構成されていた混合ホッジ構造とは構成方法が異なっている。そのため、これら二つの混合ホッジ構造が一致することは自明ではない。この両者が一致することは当然期待される性質であり、これを証明することも今後の研究課題である。

5.　主な発表論文等

[雑誌論文]（計 0 件）

[学会発表]（計 0 件）

[その他]

T. Fujisawa and C. Nakayama : “Geometric polarized log Hodge structures with a base of log rank one”, to appear in Kodai Math. J.

T. Fujisawa : “Mixed Hodge structures on the relative log de Rham cohomology groups of a projective semistable log smooth degeneration”, in preparation