

令和元年6月18日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05110

研究課題名(和文) 有理特異点と概ゴレンシュタインブローアップ代数の研究

研究課題名(英文) Research on rational singularities and almost Gorenstein blow-up algebras

研究代表者

吉田 健一 (YOSHIDA, Ken-ichi)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：80240802

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：我々は Gorenstein 局所環のパラメーターイデアルの Rees 代数が概 Gorenstein 環であるとき、その局所環は正則局所環に限ること、逆に、正則パラメーター系の一部で生成されたイデアルの Rees 代数が概 Gorenstein 次数付き環であることを証明した。pg イデアルの概念について、Rees 代数の言葉でそれを特徴づけた上、適当な仮定のもとで、2次元正規整域における任意の pg イデアルの Rees 代数が概 Gorenstein であることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

我々は Rees 代数を通して、「概 Gorenstein 環」と「概 Gorenstein 次数付き環」の概念の違いを浮き彫りにした。この研究はその後の概念を導入する際に参考になったと思われる。また、研究代表者らが本研究の前に導入した pg イデアルの概念を環論的に同値な条件に読み替えることにより、有理特異点のイデアル論を超える形で、2次元特異点に付随するイデアル論の道を開くことができたという事実は重要な成果であると言えるだろう。

研究成果の概要(英文)：We proved that if the Rees algebra of any parameter ideal in a Gorenstein local ring is an almost Gorenstein local ring then the ring is regular, and that the Rees algebra of an ideal generated by part of a regular system of parameters is an almost Gorenstein graded ring. We characterized the notion of pg ideals in terms of Rees algebras, and proved that the Rees algebra of any pg ideal is an almost Gorenstein local ring under suitable conditions.

研究分野：可換環論

キーワード：概Gorenstein環 pg イデアル good イデアル 有理特異点 Ulrich イデアル strong Rees property normal reduction number

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は渡辺敬一氏(日本大学文理学部元教授)、奥間智弘教氏(山形大学理学部教授)らと **pg** イデアルの概念を導入し、2次元有理特異点のイデアル論をより広い2次元正規局所環の整閉イデアルの理論に埋め込めることに成功していた。また、後藤四郎氏(明治大学理工学部教授)らのグループは **Froberg** 氏らが導入した **almost Gorenstein** 環の概念を整備し、高次元化に取り組んでいた。さらに、研究目的にも記したように、2次元有理特異点は代表的な **almost Gorenstein** 環であり、**pg** イデアルの **Rees** 代数(ブローアップ代数)は **almost Gorenstein** 性を有することが予想されていた。

## 2. 研究の目的

2次元の有理特異点の整閉イデアルのブローアップ代数(Rees 代数)は非常によい構造を持つことが知られている(Lipman)。一方で、高次元の有理特異点については十分理解されているとは言えない。研究代表者はこの点に留意しつつ、有理特異点とその周辺について研究を続けてきた。例えば、特異点解消を使わずに定義できる F 有理特異点の概念を利用し、2次元有理特異点を単純特異点とみなして Ulrich イデアルと Ulrich 加群の分類を行った。最近 almost Gorenstein 環(概 Gorenstein 環)の概念が導入され、Cohen-Macaulay 環の中に Gorenstein 環に近いが、異なるクラスが導入された。また、2次元有理特異点は常に almost Gorenstein 局所環であることが証明されている(後藤氏ら[GTT])。この事実に注目し、**2次元有理特異点のイデアル論を拡張しつつ、Rees 代数の almost Gorenstein 性を研究することが本研究の目的である。**

## 3. 研究の方法

### (1) Almost Gorenstein Rees 代数の研究

研究代表者が奥間智弘氏、渡辺敬一氏と導入した **pg** イデアルを環論的に特徴づけした結果を利用して、明治大学の後藤四郎氏、谷口(遠藤)直樹氏、松岡直之氏らと協力して、Rees 代数の almost Gorenstein 性を調べる。また、Rees 代数は次数付き環であるが、次数付き環の almost Gorenstein 性に関する適切な定義についても検討する。**pg** イデアルの multi Rees 代数は Cohen-Macaulay 環であるが、その multi Rees 代数における標準化群の構造解析を行い、multi Rees 代数の almost Gorenstein 性の証明に利用する。

### (2) 3次元トーリック環の分類

2次元の多項式環におけるパラメーターイデアルの Rees 代数の almost Gorenstein 性を参考にして、3次元トーリック環の典型的な構造を見出す。その際には、ダイマーモデルなどを CM 加群の表現論の視点で研究している名古屋大学(現:東京大学)の中嶋祐介氏の知識を参考にさせてもらう。同様に、マッカイ対応などの専門家の伊藤由香理氏らと研究交流し、**3次元トーリック環における almost Gorenstein 性の判定法を見出し、高次元化の目途を立てる。**

**商特異点における almost Gorenstein 性の判定法を見出す努力をする。** 現段階では、2次元においてすら必要な道具が開発されていないが、正準加群の構造は明確であり、十分勝算は見込まれる。前年度までに得られたトーリック環の結果を考慮して、巡回商特異点の場合の almost Gorenstein 性を特徴づけ、一般の商特異点の場合に一般化する予定である。

### (3) Ulrich イデアルと Ulrich 加群

**Ulrich イデアルと Ulrich 加群の研究を再開する。** Almost Gorenstein 局所環の定義に現れる Ulrich 加群は極大でない Cohen-Macaulay 加群であるが、この場合に極大 Cohen-Macaulay 加群の理論が適用できるような方法の開発に努める。

全体を通じて、明治大学のプロジェクトと連携し、ベトナムの若手研究者と交流を深めることを検討している。本研究においてもそのプロジェクトを積極的に支援し、若手研究者の招聘を検討している。また、伊藤由佳理氏と協力して数理解析研究所の短期共同研究として、「マッカイ対応と Ulrich イデアル」の研究集会を行う。

## 4. 研究成果

### (1) Almost Gorenstein Rees 代数

発表論文における成果として、Gorenstein 局所環におけるパラメータイデアル、もしくはその一部で生成されたイデアルに関する Rees 代数の無縁イデアルに関する局所化が almost Gorenstein 局所環になるには、ベースになる環が正則局所環であることの必要性を証明した。また、Eagon-Northcott 複体の理論を用いて、パラメータイデアル  $I$  に対して、それが正則パラメータ系の一部で生成されることと、その Rees 代数が almost Gorenstein 次数

付き環であることが同値であることを証明した。

発表論文 では、2次元正則局所環の整閉イデアルの Rees 代数が次数付き almost Gorenstein 環であることを証明した。また、Ulrich の議論を応用して正則局所環上の加群の Rees 代数も同様の性質を持つことを示すことができた。この議論においては正則局所環であることが大事なところで利用されているが、より一般の有理特異点の場合に拡張できるのではないかと予想されている。

発表論文 において、2次元正規局所整域の pg イデアルの Rees 代数が常に almost Gorenstein 環であると予想し、ベースが Gorenstein 環の場合には正しいことを証明した。2次元の almost Gorenstein 局所整域が極小重複度を持つとき、その極大イデアルのべきに関する Rees 代数が almost Gorenstein 環であることを証明した。高次元の正則局所環に対して、その極大イデアルのべきが almost Gorenstein になるような場合を特徴づけた。これらの結果は発表論文 の2次元正則局所環の極大イデアルのべきに関する結果の精密化である。

## (2) Pg イデアルの Rees 代数

奥間智弘氏 渡辺敬一氏と共に研究代表者は、「有理特異点の整閉イデアル」をモデルにして、pg イデアルの理論を幾何学的に導入した。

発表論文 では、pg イデアルになることの環論的同値条件として、その Rees 代数が Cohen-Macaulay 整域であることを与えた。また、この結果を用いて、幾何種数が大きい超平面に対して pg イデアルの例を多く提供することに成功した。

発表論文 では、core と pg イデアルを詳しく調べ、整閉イデアルに対して core を取る操作が包含関係を保つことと、環が有理特異点であることが同値であることを証明した。また、(正則でない)任意の2次元の「十分良い」正規整域は good pg イデアルを持つことを証明した。この結果は Gorenstein 環の場合に証明されていた事実を一般化したものである。

## (3) Strong Rees 性

正規局所整域の整閉イデアルに必要な極小生成系の個数は、それを含むどんなイデアルの極小生成系の個数よりも多いという性質(Rees 性)を持つことが知られている。発表論文 では、強 Rees 性(strong Rees property)の概念を導入し、Puthenpurakal の開発した完全列の性質を用いて、極大イデアルのべきがその性質を持つかどうかを調べた。結果として、付随する次数付き環の深さ(depth)が2以上あれば、極大イデアルのべきが強 Rees 性を持つことを証明した。応用として、2次元の正規局所整域について、その極大イデアルのべきが高橋-Dao の不等式を満たすことと、極大イデアルが pg イデアルであることが同値であることを証明することができた。また、滑らかな連結曲線のポイント因子に付随する数値的半群を用いて、対応する2次元の代数の極大イデアルのべきが強 Rees 性を持たないような例を具体的に構成することができた。

## (4) Normal Reduction 数

2次元正規局所整域の整閉イデアルに対して、あるべきの整閉包がより低いべきで表現できるような最小値を取るとき、それよりも高いべきが同様に表現できるかどうかは未解決問題である。そもそも normal reduction 数については知られていないことが多くある。発表論文 においては、Brieskorn 型の超平面の極大イデアルに焦点を絞り、normal reduction 数を計算した。これは「極大イデアルが pg イデアルになるような環」の一般化を提供している。さらに、応用として、elliptic 特異点の特徴づけを与えることにも成功している。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 10件)

Tomohiro Okuma, Kei-ichi Watanabe, [Ken-ichi Yoshida](#), The normal reduction numbers for hypersurfaces of Brieskorn type, Acta Mathematica Vietnamica 44-1, 2018年, 87-100, 査読有.

DOI: 10.1007/s40306-018-00311-4

Tony J. Puthenpurakal, Kei-ichi Watanabe, [Ken-ichi Yoshida](#), Strong Rees property of powers of the maximal ideal and Takahashi-Dao's question, Journal of Algebra, 2018年, online 2018.8.6, 査読有.

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2018.07.028

Tomohiro Okuma, Kei-ichi Watanabe, [Ken-ichi Yoshida](#), A characterization of 2-dimensional rational singularities via core of ideals, Journal of Algebra 499, 2018年, 450-468, 査読有.

DOI: 10.1016/j.jalgebra.2017.11.053

Shiro Goto, Naoyuki Matsuoka, Naoki Taniguchi, Ken-ichi Yoshida, Almost Gorensteinness of Rees algebras of  $p_g$  ideals, good ideals, and powers of the maximal ideals, Michigan Mathematical Journal 67, 2018 年, 159-174, 査読有.

DOI:10.1307/mmj/1516330972

Yusuke Nakajima, Ken-ichi Yoshida, Ulrich modules over cyclic quotient surface singularities, Journal of Algebra 482, 2017 年, 224-247, 査読有.

DOI:10.1016/j.jalgebra.2017.03.018

Kazuhiro Ichihara, Ken-ichi Yoshida, On the most expected number of components for random links, Tohoku Mathematical Journal 69-4, 2017 年, 637-641, 査読有.

DOI: 10.2748/tmj/1512183634

Satoshi Murai, Isabella Novik, Ken-ichi Yoshida, A Duality in Buchsbaum rings and triangulated manifolds, Algebra and Number Theory 11-3, 2017 年, 635-656, 査読有.

DOI: 10.2140/ant.2017.11.635

Tomohiro Okuma, Kei-ichi Watanabe, Ken-ichi Yoshida, Rees algebras and  $p_g$  ideals in a two-dimensional normal local domain, Proceedings of American Mathematical Society 145-1, 2017 年, 39-47, 査読有.

DOI: 10.1090/proc/13235

Shiro Goto, Naoyuki Matsuoka, Naoki Taniguchi, Ken-ichi Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras over two-dimensional regular local rings, Journal Pure and Applied Algebra 220, 2016 年, 3425-3436, 査読有.

DOI:10.1016/j.jpaa.2016.04.007

Shiro Goto, Naoyuki Matsuoka, Naoki Taniguchi, Ken-ichi Yoshida, The almost Gorenstein Rees algebras of parameters, Journal of Algebra 452, 2016 年, 263-278, 査読有.

DOI:10.1016/j.jalgebra.2015.12.022

[学会発表](計 12 件)

Ken-ichi Yoshida, "Lower bound of Hilbert-Kunz multiplicities", AMS Sectional Meeting AMS Special Session, Special Session on Commutative Algebra and its Environs, I, University of Hawaii at Manoa, Honolulu, 2019 年 3 月.

Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida, "Lower bound of Hilbert-Kunz multiplicity", 第 40 回可換環論シンポジウム, レクトーレ葉山 (神奈川県葉山市), 2018 年 11 月.

吉田健一, "Normal reduction numbers of some 2-dimensional normal hypersurfaces", 第 19 回岡山可換代数表現セミナー (OSCAR19), 岡山大学理学部 (岡山県岡山市), 2018 年 1 月.

奥間智弘, 渡辺敬一, 吉田健一, "Normal reduction numbers of integrally closed ideals", RIMS 共同研究 (公開型) 第 39 回可換環論シンポジウム (京都府京都市), 2017 年 11 月.

渡辺敬一, 吉田健一, "Strong Rees property for powers of the maximal ideal", 日本数学会秋季総合分科会, 山形大学 (山形県山形市), 2017 年 9 月.

Ken-ichi Yoshida, "Characteristic  $p > 0$  methods in commutative algebra", International school and Workshop on Commutative Algebra by and for young mathematicians (ベトナム, ホーチミン, Ton Duc Thang University), 2017 年 9 月.

吉田健一, "Dao's question and strong Rees property", 第 29 回可換環論セミナー, 山口大学 (山口大学吉田キャンパス大学会館), 2017 年 2 月.

吉田健一, "Almost Gorenstein Buchsbaum local ring", Mini Workshop on Commutative Algebra, OIST (沖縄科学技術大学院大学), (沖縄県国頭郡恩納村), 2017 年 1 月.

吉田健一, "Strong Rees Property と Dao の問について", 月曜特異点セミナー, 日本

大学文理学部（東京都世田谷区）, 2017年1月.

奥間智弘, 渡辺敬一, 吉田健一, “Geometric genus of cone singularities”, 第38回可換環論シンポジウム, IPC, (神奈川県葉山市), 2016年11月.

吉田健一, “Introduction to Ulrich modules and ideals”, RIMS 研究集会, Non-commutative crepant resolutions, Ulrich modules and generalizations of the McKay correspondence (京都府京都市), 2016年6月.

吉田健一, “Almost Gorenstein property of Rees algebras of powers of maximal ideals”, Commutative Algebra Day in Tokyo (東京都, 東京大学), 2016年5月.

〔その他〕

ホームページ等

<http://kenkyu-web.cin.nihon-u.ac.jp/scripts/websearch/index.htm>

## 6. 研究組織

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。