

令和 2 年 6 月 9 日現在

機関番号：32670

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05111

研究課題名(和文) 因子へのベクトル束の制限から定義される代数幾何符号の研究

研究課題名(英文) Research on the algebraic-geometric codes defined from restriction of vector bundles to divisors

研究代表者

中島 徹 (NAKASHIMA, Tohru)

日本女子大学・理学部・教授

研究者番号：20244410

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：情報を送信する過程で生じた誤りを訂正する誤り訂正符号は現代社会では不可欠な技術である。当研究の目的は、ベクトル束の因子への制限を用いて定義される代数幾何符号である一般Savin符号の性質を解明することであった。当研究の結果、代数曲面上の一般Savin符号に対してパラメーターの評価式を得ることが出来た。又、3次元射影多様体上の半安定層の存在問題を解決し、Bogomolov-Gieseker型不等式を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来知られていたGoppa符号やSavin符号などの代数幾何符号は、代数曲線上のベクトル束の点での評価写像を用いて構成されていたが、当研究ではこれを一般化して高次元射影多様体上の因子への制限写像を用いた一般Savinの概念を導入し、パラメーターの評価などの基本的性質を明らかにした点に学術的意義がある。今後、従来より良いパラメーターを備えた一般Savin符号を構成できれば、情報通信の分野への応用が期待される。

研究成果の概要(英文)：In the modern society the error-correcting codes, which correct the errors which occurred in the process of transmitting information, is an indispensable technology. The purpose of the present research was to elucidate the properties of the general Savin code, which is an algebraic-geometric code defined by the restriction of vector bundles to divisors. As a result of the research, we could determine the parameters of the general Savin codes on certain algebraic surfaces. Furthermore we solved the existence problem of semistable sheaves on projective threefolds and proved a Bogomolov-Gieseker type inequality.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何符号 ベクトル束 因子

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 有限体上のベクトル空間の部分空間として定義される線形符号は通信の過程で生じた誤りを訂正する能力をもち、現代の情報通信には欠かせない技術である。中でも代数曲線上の直線束を用いて定義される Goppa 符号は、非常に高い漸近的性能をもつことが知られている。V. Savin はより一般に高階のベクトル束を用いた代数幾何符号を導入し、ベクトル束に弱安定性を仮定することで符号のパラメーターに対する評価式を得た。

(2) 当研究の代表者である中島は、平成 21 年度から平成 23 年度の期間に科研費補助金基盤(C)(一般)の補助を受けて Savin 符号の高次元への一般化についての研究を行った。この研究では、高次元の射影多様体上のベクトル束の切断の有限個の有理点での評価写像の像として新しいタイプの代数幾何符号を導入した。しかしながら、多様体が 2 次元以上の場合にはベクトル束に関して非常に強い仮定をした場合にしかパラメーターの良い評価式を得ることが出来なかった。また、中島は平成 24 年度から平成 27 年度までの期間には、科研費補助金基盤(C)(一般)の補助を受けて算術的曲線上の Hermite ベクトル束を用いて定義される算術的 Arakelov 符号の研究を行った。その結果、Savin 符号の場合と同様に Hermite ベクトル束に安定性を仮定することによって符号のパラメーターの評価式を得ることに成功した。

(3) 上記の研究に於いて行った Savin 符号の高次元への一般化では、点での評価写像の核は安定性条件で消滅することが保証されないことがパラメーターの評価を困難にする大きな理由であった。この問題の解決に取り組んだ結果、点ではなく因子(即ち余次元 1 の閉部分スキーム)への制限がベクトル束のコホモロジー群に引き起こす制限写像によって定義される新しい代数幾何符号を導入するという着想を得た。この符号は因子の選び方により多くの自由度を持つ為、従来知られていた点を用いた符号よりも高い性能をもつことが期待できる。そこで当研究ではこの様な符号を一般 Savin 符号と名付け、考察の対象とすることにした。

## 2. 研究の目的

当研究では、一般 Savin 符号に関して以下に述べる課題を解決することを目的とした。

### (1) 一般 Savin 符号のパラメーターの決定

まず最も基本的な場合として、高次元射影多様体上のベクトル束の切断を因子に制限することによって定まる一般 Savin 符号の次元、最小距離などのパラメーターの性質を明らかにし、それらの間に成立する不等式(限界式)を証明することを課題とした。

### (2) 高次一般 Savin 符号の性質の解明

ベクトル束の 1 次以上のコホモロジー群の間の制限写像によって定義される一般 Savin 符号の性質を考察する。その為に、制限写像で 0 になるコホモロジー群の元の空間の代数幾何的意味を明らかにし、適当な安定性条件の下で消滅定理を証明することを課題とした。

### (3) 高性能の一般 Savin 符号の構成

射影多様体とその上のベクトル束を適切に選ぶことにより、性能の高いパラメーターを持った一般 Savin 符号が構成できるかどうかを考察する。特に、伝送率と相対最小距離が共に正の値に収束する漸近的に良い一般 Savin 符号の無限列の存在問題を解決することを課題とした。

### (4) 算術的一般 Savin 符号の性質の解明

Arakelov 幾何学に於いて一般 Savin 符号の類似が存在するかどうかを考察する。以前に中島が導入した Arakelov 符号の概念を一般化し、高次元の算術的多様体とその上のエルミートベクトル束に適当な安定性条件を課してパラメーターを決定することを課題とした。

## 3. 研究の方法

当研究では、以下の様な方法を用いて研究を実施した。

### (1) 高次元多様体上の層の弱安定性

曲線上の Savin 符号ではベクトル束の安定性を一般化した弱安定性の概念を用いて最小距離の評価が可能であった。因子へ制限して 0 となる大域切断達は適当な数値的条件があれば弱安定性によって消滅することが期待される。そこで当研究では、弱安定性を高次元射影多様体上の torsion-free 層にまで拡張することによって一般 Savin 符号のパラメーターを評価することを計画した。

### (2) 層の拡大と変形理論

射影多様体上に与えられた 2 つの接続層から新しい層を非自明な拡大によって構成する方法は Serre 対応として良く知られている。当研究では、3 次元多様体の場合に Wu-Yau によって利用された Serre 対応の一般化を高次元の場合に拡張し、拡大によって得られた層を安定な反射層に変形して安定層を構成することを計画した。

### (3) 安定層の因子への制限定理

一般 Savin 符号では、因子へ制限したベクトル束の切断の空間の次元が重要なパラメーターで

ある。当研究では、A.Langer の制限定理を用いて安定ベクトル束を十分大きな次数の因子へ制限し、Riemann-Roch の定理を用いて次元の計算を行うことを計画した。

#### (4) 半安定層のコホモロジー消滅定理

半安定層の 1 次のコホモロジー群は次数がある定数より大きいときには常に消滅することが H.Sun によって証明されている。当研究では、この消滅定理を(3)の Langer の制限定理と組み合わせることで次元に関する帰納法によってベクトル束の性質をより次元の低い部分スキームの場合に帰着させることを計画した。

### 4. 研究成果

当研究では、3.で述べた方法を用いて研究を実施し、以下の様な成果を得た。

#### (1) 曲面上の一般 Savin 符号のパラメーターの決定

有限体上定義された非特異射影多様体  $X$  上のベクトル束  $E$  の大域切断を有限個の因子の族へ制限することによって一般 Savin 符号の定義を行った。更に、 $E$  がある豊富因子  $H$  に関して半安定であるという仮定のもとで、得られた符号の最小距離の下からの評価式を  $X$  上での交点理論を用いて証明することができた。この結果により、一般 Savin 符号に於いてベクトル束の半安定性の概念が本質的に重要であることが明らかになった。特に  $X$  が線職面や del-Pezzo 曲面などの具体的な有理曲面の場合に有理直線への制限写像から定まる一般 Savin 符号を考察し、次元の決定を行うことができた。

#### (2) 半安定層に対する Bogomolov-Gieseker 型不等式

3 次元以上の射影多様体では、ベクトル束  $E$  を因子  $D$  へ制限したときの大域切断の次元は  $D$  上での Riemann-Roch の定理を用いて表される為、次元の評価の為に  $E$  のチャーン類の交点数の間に非自明な不等式が成り立つかどうかについて考察を行った。その結果、標数 0 の基礎体の場合に従来 1 次と 2 次のチャーン類について知られていた Bogomolov-Gieseker の不等式の類似を一般の 3 次元射影多様体上の半安定層の 3 次チャーン類に対して証明することができた。この結果は、Calabi-Yau 多様体の場合に最近弦理論で議論されている Bogomolov-Gieseker 型不等式と非常に深い関係があることも明らかになった。この不等式が有限体の場合にも成立すれば、高次一般 Savin 符号のパラメーターの決定に大きな進歩を与えることが期待される。

#### (3) モジュライ空間の Brill-Noether 軌跡への応用

射影曲線上の Jacobi 多様体(即ち直線束のモジュライ空間)上の Brill-Noether 軌跡は曲線の幾何学と密接に関連している。中島は以前の研究に於いて任意の射影多様体上の安定層のモジュライ空間に対してコホモロジー群の次元を用いて Brill-Noether 軌跡の類似を定義したが、これまで Brill-Noether 軌跡が空でないための良い判定法が分かっていなかった。当研究では、非特異射影多様体上の安定層のコホモロジー群の次元に対して上からの評価式を証明し、その応用としてモジュライ空間の次元の評価式や Brill-Noether 軌跡が空でないための必要条件を導くことができた。

#### (4) 安定反射層の存在定理

一般 Savin 符号の定義では、ベクトル束を一般化した反射層(即ち二重双対が自分自身に等しい層)を用いることができることが明らかになった為、安定な反射層の存在の問題について考察を行った。その結果、標数 0 の基礎体の場合には任意次元の射影多様体の余次元 2 の閉部分スキームのイデアル層から拡大と変形理論を用いて安定な反射層を構成する方法を確立した。この結果を応用して、曲線上のファイバー構造を持つ 3 次元射影多様体上に多くの安定層の例を構成することができた。有限体の場合に安定層の存在を証明することができれば、与えられたパラメーターをもつ一般 Savin 符号の構成に応用が期待される。

#### (5) Arakelov 幾何学との関連性

当研究の対象である一般 Savin 符号を算術的多様体に拡張しようとする過程に於いて、Arakelov 幾何学との非常に興味深い関係が明らかになった。それは、最近 Chen-森脇によって導入された adelic 曲線上の adelic ベクトル束の概念を用いることにより、一般 Savin 符号を付値論的な観点から解釈できるという点である。その結果として adelic ベクトル束に基づく新しい型の代数幾何符号(adelic 符号)が定式化できる可能性が生まれてきた。

#### (6) 研究の位置づけと今後の展望

当研究の成果によって、従来の点での評価写像を用いる Goppa 符号や Savin 符号の枠組を大きく一般化する代数幾何符号を構成することができた。当研究で得られた安定層の存在定理や Bogomolov-Gieseker 型不等式は標数 0 の場合に限定されているため、一般 Savin 符号への応用の為には今後有限体の場合へ拡張することが必要であるが、これは今後解決すべき重要な課題である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tohru Nakashima	4. 巻 140
2. 論文標題 Effective bounds for semistable sheaves on a threefold	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 271-279
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2019.02.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tohru Nakashima	4. 巻 109
2. 論文標題 Higher Brill-Noether loci and Bogomolov-Gieseker type inequality	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 335-340
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00013-017-1067-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tohru Nakashima	4. 巻 121
2. 論文標題 Stable reflexive sheaves of degree zero on Calabi-Yau manifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 1-7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2017.06.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tohru Nakashima	4. 巻 224
2. 論文標題 Existence of stable reflexive sheaves on certain threefolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 1205-1214
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2019.07.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 中島 徹
2. 発表標題 Generalizations of algebraic-geometric codes
3. 学会等名 代数幾何学と暗号数理の展開（招待講演）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----