様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　６ 月　９ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2019
課題番号：１６Ｋ０５１１３

研究課題名（和文）正標数の射影代数幾何

研究課題名（英文）Projective Algebraic Geometry in Positive Characteristic

研究代表者
梶　元（KAJI, Hajime）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：７０１９４７２７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：1845年，George Boole はヴェロネーゼ多様体の双対多様体の次数に関する公式を発見した.一般に射影多様体 X の双対多様体 (dual variety) とは,双対射影空間の閉部分多様体で X に接する超平面のなす集合の閉包で与えられるものをいう.先の研究ではヴェロネーゼ多様体に対して,双対多様体を一般ガウス写像の像に一般化した次数公式（未発表）を得ていた.本研究ではその一般化された次数公式を用いて,ヴェロネーゼ多様体の一般ガウス写像の像次数の漸近的挙動について調査した.

研究成果の学術的意義や社会的意義
170年以上前にGeorge Booleにより発見されていたヴェロネーゼ多様体の双対多様体の次数公式に焦点を当てて研究をした.一般ガウス写像の像の次数に一般化した公式自体は,与えられた数の分割に対応する既約表現の次元を含む一見複雑なものとなったが,漸近的挙動について,上限・下限は意外に単純な式により，ある程度良く評価されることがわかった.
Booleの公式の一般化として他の多様体の双対多様体の次数公式は研究されてきたが,一般ガウス写像の像の次数については本研究で初めて扱われたものである.

研究成果の概要（英文）：In 1845, George Boole discovered a formula for the degree of dual manifolds of Veronese varieties. In general, the dual variety of a projective variety X is a closed variety of dual projective space given by the closure of the set of hyperplanes tangent to X. In the previous research, for Veronese varieties, we obtained an degree formula (unpublished) that generalizes dual varieties into images of general Gauss maps. In this research, we investigated the asymptotic behavior of the image degree of the general Gauss map of the Veronese varieties using the generalized degree formula.

研究分野：数学　代数幾何学

キーワード：射影多様体　正標数　ガウス写像　双対多様体

1．研究開始当初の背景

射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ のガウス写像 (Gauss map) とは, X からグラスマン多様体 $\mathbb{G}(n, N)$ への有理写像で X の非特異点 x を x における射影接平面 $T_x X$ に対応する $\mathbb{G}(n, N)$ の点に写すことにより定まるものをいう．また, X の双対多様体 (dual variety) とは, 双対射影空間 $\check{\mathbb{P}}^N$ の閉部分多様体で X に接する超平面のなす集合の閉包で与えられるものをいう．

一般の代数閉体上の射影代数幾何において, 正標数特有の現象を研究することを目標とし, 特に, 射影多様体の双対多様体とガウス写像に焦点を当て, 多様体が次元 1 ないし埋め込まれた射影空間における余次元が 1 の場合に知られていた結果を, 高次元化 · 高余次元化することを目的として研究を続けていた．

そのうち, 両方の概念を包括する一般ガウス写像 (higher Gauss map) について研究することが重要であると気づいた．すると, そのためには, 射影多様体上のベクトル束に付随するグラスマン束に関する研究が必要となった．特にグラスマン束の次数公式が重要であると判った．上記のガウス写像と双対写像の研究と並行してグラスマン束に関する研究を始めた．途中から寺杣友秀氏 (東大数理) に協力していただき, 共同研究となった．

2．研究の目的

一般の代数閉体上の射影代数幾何において, 標数零の体上では起こらない正標数特有の現象を研究することを目的とする．特に, 射影多様体の射影空間内における射影接空間の振る舞いに着目し, 射影双対多様体とガウス写像に焦点を当て, 多様体が次元 1 ないし埋め込まれた射影空間における余次元が 1 の場合に知られていた結果を, 高次元化・高余次元化を目指す．それを通じて, (複素) 解析的手法を用いずに, 射影代数幾何を純代数的にどこまで展開できるか? または, (あるとしたら現在の) 代数に欠けているものは何か? どのような代数的理論を構築すれば補うことができるのか? 解明したい．解明できたならもちろん, それを補う新しい代数的理論の構築を目指したい．

3．研究の方法

A. ガウス写像が非分離的となる射影埋込みを許す射影多様体の分類を目指す．ここで, 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ のガウス写像とは, X の非特異点 x に対して x における射影接空間 T_x を対応させることにより得られる有理写像, $\gamma : X \to \mathbb{G}(n, N); x \mapsto T_x$ のことと定義する．射影多様体に特異点を許す場合と許さない場合に分けて考える．

A-1. 特異点を許す場合．問題与えられた代数関数体の非分離的有限次拡大 K/K' に対して, 特異点を許す K の射影モデル $X \subseteq \mathbb{P}^N$ で, $K = K(X)$ において $K' = K(\gamma(X))$ となるものが存在するか?を考えたい．従来の深澤知氏 (山形大学) との共同研究を踏まえると, 高い非分離次数や非自明な分離次数のガウス写像による実現が未解決である．Singular などの計算代数システムを使った計算実験を行うことにより解決の糸口を見出したい．そのためには引き続き深澤氏との研究打合せが不可欠である．

A-2. 非特異の場合．性質「(GMRZ):ガウス写像の微分が恒等的に零となる射影埋込みを許す」をみたす非特異射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ について調べる．現在, セグレ多様体 (射影空間の直積), グラスマン多様体, そして, 低い次数の超曲面に関する (GMRZ) 性は判明しており, また, 代数多様体上の有理曲線の幾何への応用も見出されている．しかし, たとえば正標数のファノ多様体の (GMRZ) 性については解っていないことが多い．そこでまず 3 次元ファノ多様体の (GMRZ) 性について調べたい．これについては, 正標数のファノ多様体についてみずから勉強するとともに, 機会をとらえて専門家 (たとえば, 東京理科大学の伊藤浩行氏, 広島市大の齋藤夏雄氏および廣門正行氏) とのセミナーや議論をしてゆきたい．

B. 一般標数における一般ガウス写像の構造について詳しく調べる．モデルケースとして, ヴェロネーゼ多様体に対する一般ガウス写像の研究は既に開始している．

C. 代数多様体の射影埋め込みに応じて現れるガウス写像による関数体の拡大の決定について, アーベル多様体や K3 曲面の場合に明らかにすることを目指した準備を行いたい．まずアーベル多様体や K3 曲面上のについて知識を習得し, 既存の研究で不足する部分については独自の研究を深めた

い. なぜベクトル束か?というと, 楕円曲線の場合にガウス写像で得られる関数体の拡大を調べた際, 楕円曲線上のベクトル束に関する知識, 特にフロベニウス写像による引き戻しにおける振る舞いに関する知識が不可欠だったからである.

４. 研究成果

高山晴久氏 (東大数理) の研究に触発されて, 先に得ていたヴェロネーゼ多様体の一般ガウス写像の像の次数公式を用いて, さらに次数の漸近的挙動について研究した. 次数公式とその結果を論文にまとめて学術雑誌において発表した:

H.Kaji: Higher Gauss Maps of Veronese Varieties — a generalization of Boole's formula —, Comm. Algebra **46** (2018), no. 9, 4064–4078.

この研究については, 研究集会「Degenerations, algebraic surfaces and related topics」(神戸大学, 2019 年 12 月 17 日) において論文と同じ題目で招待講演を行なった.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 KAJI, Hajime	４．巻 46 (9)
２．論文標題 Higher Gauss Maps of Veronese Varieties-a generalization of Boole's formula	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Communications in Algebra	６．最初と最後の頁 4064-4078
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2018.1435790	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　9件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 梶　元
２．発表標題 Powers of Ideals
３．学会等名 研究集会「第二回宇都宮大学代数幾何研究集会」，宇都宮大学
４．発表年 2019年

１．発表者名 KAJI, Hajime
２．発表標題 Degree Formula for Grassmann Bundles
３．学会等名 NSTS Seminar in Algebraic Geometry, NSTS (=国家理論科学科学研究中心), NTS (=国立台湾大学)（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 梶　元
２．発表標題 Two Results on Curves in P^3
３．学会等名 研究集会「都の西北 代数幾何学シンポジウム」，早稲田大学（招待講演）
４．発表年 2019年

1．発表者名
　椙　元

2．発表標題
　Higher Gauss maps of Veronese varieties ―a generalization of Boole's formula―

3．学会等名
　研究集会「Degenerations, algebraic surfaces and related topics」, 神戸大学（招待講演）

4．発表年
　2019年

1．発表者名
　椙　元

2．発表標題
　Degree formula for Grassmann bundles, II

3．学会等名
　研究集会「Arithmetic and Algebraic Geometry 2019 -in honour of Professor Tomohide Terasoma's 60th birthday-」東京大学大学院数理科学研究科棟大講義室（駒場1キャンパス), 2019年1月22日.（招待講演）（国際学会）

4．発表年
　2019年

1．発表者名
　椙　元

2．発表標題
　Degree Formulae for Two-Step Flag Varieties

3．学会等名
　研究集会「第一回宇都宮大学代数幾何研究集会」 宇都宮大学（峰キャンパス).（招待講演）

4．発表年
　2018年

1．発表者名
　椙　元

2．発表標題
　Degree formula for Grassmann bundles and its applications

3．学会等名
　研究集会「ベクトル束の分裂・構成・安定性とその応用」 九州大学（伊都キャンパスウェスト）.（招待講演）

4．発表年
　2018年

１．発表者名 楫 元
２．発表標題 On a problem posed by Alessandro Terracini
３．学会等名 第５回代数幾何学研究集会－宇部－（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 楫 元
２．発表標題 グラスマン束の次数公式（新証明）
３．学会等名 ２５回沼津改め静岡研究会（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 楫元
２．発表標題 グラスマン束の次数公式（新証明）とその応用
３．学会等名 山形代数幾何小研究集会
４．発表年 2016年

１．発表者名 楫元
２．発表標題 グラスマン束の次数公式（新証明）とその応用
３．学会等名 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺」（招待講演）
４．発表年 2016年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考