

令和 4 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05117

研究課題名(和文) 特異点の幾何とホッジ・ラプラシアン固有値の研究

研究課題名(英文) Studies of geometry of singularities and the eigenvalues of the Hodge-Laplacian

研究代表者

高橋 淳也 (Takahashi, Junya)

東北大学・情報科学研究科・助教

研究者番号：10361156

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：閉 Riemann 多様体上の Hodge-Laplacian の固有値を持つ幾何学的情報の解明を目指して研究を行い、以下の成果を得た：

任意の m 次元閉多様体上に、与えられた次数 p ($1 \leq p \leq m-1$) と任意の番号 k に対し、 p 次微分形式に作用する Hodge-Laplacian と rough Laplacian の第 k 固有値が 0 に収束するような、体積一定の Riemann 計量の列を構成した。特に、 m 次元球面の場合には、断面曲率が非負という条件も保つ Riemann 計量の 1-パラメーター族を構成した。

これは、Colette Ann'e 氏(フランス、ナント大学)との共同研究である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

コンパクト Riemann 多様体上の Hodge-Laplacian の固有値を持つ幾何学的情報の解明は大変重要な問題である。しかし、未だその全容の解明には至っていない。解明には様々な困難があるが、まずは具体例を多く作ることが重要である。特に、幾何学的状況がつかみ易い例は重宝する。

今回、そのような具体例を構成出来たので、応用や今後の研究の方向性を与えることが出来たと考えている。

研究成果の概要(英文)：We study to reveal the geometric information of the eigenvalues of the Hodge-Laplacian on closed Riemannian manifolds, and then obtained the following results:

On any m -dimensional closed manifold, for a given degree p with $1 \leq p \leq m-1$ and a natural number k , we construct a family of Riemannian metrics with fixed volume such that the k -th eigenvalues of the Hodge-Laplacian and the rough Laplacian acting on p -forms converge to 0 . In particular, in the case of m -dimensional spheres, we can choose these Riemannian metrics as those of non-negative sectional curvature.

This is a joint work with Colette Ann'e (Universit'e de Nantes in France).

研究分野：微分幾何学

キーワード：ホッジ・ラプラシアン ラフ・ラプラシアン 微分形式 固有値 リーマン計量の変形 特異点 L^2 ストークス定理 L^2 調和形式

1. 研究開始当初の背景

コンパクト Riemann 多様体上には Hodge-Laplacian (ホッジ・ラプラシアン) と呼ばれる微分形式に作用する楕円型微分作用素が定まり、そのスペクトルは重複度が有限な非負の固有値(点スペクトル)のみからなる。これらの固有値には Riemann 多様体の幾何学的な情報が反映されており、**その固有値のもつ幾何学的情報を解明することがスペクトル幾何学の重要な問題である。**

この問題は、関数に作用する Laplacian の場合にはほぼ解明されてるが、微分形式に作用する Hodge-Laplacian の場合にはまだ不明なことが多く、解明しなくてはならない問題が多い状況である。例えば、正の第 1 固有値を上または下から幾何学的な量を用いた評価式も、最良な結果は得られていない。

これらが困難である原因は、微分形式そのものの解析の複雑さに加えて、多様体のトポロジーが深く関係していることにある。実際、Hodge-de Rham 理論により、固有値 0 の重複度が Betti 数という多様体のトポロジーのみで決まることにある。しかし、具体的な固有値 0 に対応する固有形式(調和形式)の様子が分からず、解析を行う上で大きな障害となっている。このため、関数の Laplacian において有効であった手法が殆ど使えない状況である。

しかし、逆に言うと、**トポロジーを反映する調和形式の存在が、微分形式の場合のスペクトル幾何学を面白くしている。** 実際、関数の Laplacian の場合では起こりえない大変興味深い現象が起こる。例えば、Riemann 多様体を Ricci 曲率の下限と直径が有界の下で変形すると、正の固有値が 0 に収束するような**小さい固有値**の存在や、反対に、すべての正の固有値が ∞ に発散する**大きい固有値**の存在が挙げられる。これらの現象は 1990 年に Colbois-Courtotis によって発見されて以来、興味深い研究対象として研究されてきた。実際、研究代表者も以前の研究において、偶数次元球面において小さい固有値の存在を初めて示したり、球面を含むあるクラスにおいて、大きい固有値の存在条件を明らかにした。

Hodge-Laplacian の固有値が多様体のトポロジーと深く結びつくことから、研究代表者は、多様体のトポロジーの変化が分かり易い一般化された連結和の崩壊に対して、Hodge-Laplacian の固有値の極限について調べた。ここで、「一般化された連結和の崩壊」とは、コンパクト多様体 M_1, M_2 を境界を持つ 2 つの多様体 M_1, M_2 を取り、それらを共通の境界で貼り合わせて、コンパクトで境界が無い多様体 $M = M_1 \cup M_2$ が得られる。そして、Riemann 計量の族 g で、パラメーター $\epsilon > 0$ のとき、片方の多様体 M_2 が 1 点に潰れる場合を考える。

このとき (M, g_ϵ) の極限空間は、上の錐 (cone) $C(M_1)$ を持つ特異点付き空間 \bar{M}_1 となる。この変形は、錐への退化と 1 点への崩壊が混在した状況であり、また、錐型特異点の特異点解消とも見ることができ、幾何学的に基本的な状況である。

研究代表者は、5 年以上に渡り Colette Anné 氏 (フランス, ナント大学) と共同で一般化された連結和の崩壊において、対応する Hodge-Laplacian の固有値と固有形式の極限について研究を行ってきた。その結果、**Hodge-Laplacian の固有値と固有形式の極限が、極限空間上のある Hodge-Laplacian (極限作用素) の固有値と固有形式によって完全に記述出来ることを証明した。** また、固有値 0 の重複度を与える指数公式も得ることが出来た。その結果、小さい固有値の存在条件も分かった (Anné-Takahashi, 2015 年, Analysis & PDE)。

ここで特筆すべきことは、**新しいタイプの小さい固有値を発見したこと** である。その固有形式は、2 つの多様体を貼り付ける多様体 M のトポロジーに応じて、**錐の頂点に固有形式のノルムが集中する**ような物である。この現象は我々が初めて発見した物で、専門家も驚く結果であった。

そこで、このような特異点の幾何やトポロジーと小さい固有値の関係について、より深く研究を行う必要があると考えた。特に、特異点集合の次元を上げるなど特異点の状況がより複雑になった場合に、小さい固有値との関係はどうなるかは全く不明なので、その解明を試みようとした。

2. 研究の目的

本研究の目的は、コンパクト Riemann 多様体を崩壊や退化など変形させた際に、対応する微分形式に作用する Hodge-Laplacian の固有値の極限を明らかにすることである。特に、極限空間に特異点が現われる場合に、極限空間上に適切な Hodge-Laplacian を定義して、固有値の極限を、極限空間上の Hodge-Laplacian の固有値として完全に記述することである。

その結果として、極限に現われる特異点の位相的・幾何的性質が Hodge-Laplacian の固有値と固有形式にどのように反映されているかも明らかにすることである。中でも、特異点を錐型より複雑にしたり、特異点集合の次元を上げるなど、極限空間に現れる特異点集合をより複雑にした場合の研究を行いたい。

3. 研究の方法

(1) 共同研究者との議論

本研究の一部は、Colette Anné 氏（フランス，ナント大学）と共同で行った．その方法は，普段は電子メールを用いてお互いの研究の進捗状況を連絡し，新たな問題が生じたらそれについて議論するというスタイルで行ってきた．

さらに，研究の進展や問題の状況に応じては，実際に訪問または招聘して，より深い議論を行う予定であった．しかし，研究期間の後半は新型コロナウイルスの感染拡大により，お互いに訪問することが出来なくなったため，引き続き電子メールを用いて議論を続けた．

(2) 研究集会への出席，関連研究者の招聘

本研究に関係する幾何学および解析学関係の研究集会に出席し，新しい知識やアイデアを収集すること，また，出席者と研究議論を行うことは非常に重要である．そのため，関連する研究集会に出席したが，一部には講義や日程の都合により，出席出来ない研究集会もあった．

さらに，より関係のある研究者については招聘してセミナーで講演していただいて，新たな知見やアイデアの収集，さらに直接の研究の議論を行った．

しかし，研究期間の後半は新型コロナウイルスの感染拡大により，実際に研究集会に出張することや研究者の招聘は不可能になった．ただし，オンラインでの研究会が開催された場合，当初は日程の都合がつかず参加出来なかったような研究集会でも，オンラインで簡単に講演を聴けるようになったことは，返って良かった面がある．

(3) モバイル機器による効率化

共同研究者を含め国内外の専門家とメールやインターネットを通して議論を行うため，また，最新の研究情報にいつでもアクセスできるように，新たにノートパソコンやタブレット端末を購入して，研究の効率化を図った．特に，タブレット端末を普段から使用することで，情報収集や検索，そして，自分のアイデアをまとめるのに大いに役に立った．

また，コロナ禍において，最新のモバイル機器はオンラインの講演を聴く，あるいは，自分の研究内容を話すときにも役立ち，必要不可欠な研究道具として大いに活躍した．

4. 研究成果

当初の予想以上に，目標であった特異点と Hodge-Laplacian の小さい固有値の関係を明らかにすることは難しい問題であることが分かった．特に，興味深い例を見つけて予想を立てて計算を行うものの，微分形式の計算が複雑すぎて，極限の評価を得るのは非常に困難な状況に陥った．それでも多少の興味深い例や部分的な結果は得られたが，論文として雑誌に発表するには至らなかった．

その様な状況下でも，計算可能な状況を上手く見つけ出して調べた結果，主に以下の2つの研究成果が得られた．これはいずれも論文として発表することが出来た（または，発表されることが確定した）．

(1) Ricci 曲率が正の非完備多様体上の L^2 -調和形式の存在

Riemann 多様体の極限に現れる特異点つき空間の上の微分形式の解析を行うために，特異点付き空間における Hodge-de Rham 理論の研究を行った．実際，特異空間の Hodge-Laplacian の正の固有値を調べるためには，固有値 0 の重複度や対応する固有形式（すなわち，調和形式）の理解が不可欠だからである．

しかし，通常の滑らかな多様体の場合とは異なり，特異空間上の Hodge-de Rham 理論はその特異点の状況により非常に複雑になる．例えば，特異点の最も基本的なモデルである錘特異点の場合でも，錘の頂点のリンクの中間次元のコホモロジー群が消えていない場合には，外微分作用素 d の閉拡張の一意性が崩れるため（ L^2 -Stokes 定理の不成立），考えるべき Hodge-Laplacian が複数現れ，どれが相応しい Hodge-Laplacian になるのかを見極めなくてはならないという問題が生じる．

ここでは，上述のような錘特異点のリンクの中間次元のコホモロジー群が消えていない場合に，調和形式の存在・非存在を調べる研究を行った．具体的には， n 次元トーラスの懸垂を考え，その非特異集合上に Ricci 曲率が正となるようなある捩じれ積型の Riemann 計量を入れたとき，非自明な L^2 -調和 p -形式 ($p=1, 2, \dots, n$) を具体的に構成した．特に，非自明な調和 1-形式が存在するので，非完備多様体では Bochner 型の消滅定理が成立しないことが分かった．この例は， L^2 -Stokes 定理が成立しないことが鍵となっており，今後の研究を進めるにあたり重要な具体例になると思われる．

(2) 体積一定下での Hodge-Laplacian と rough Laplacian の小さい固有値の存在

次に、Hodge-Laplacian の固有値に反映される Riemann 多様体の幾何学的情報を調べるために、体積を固定した下で Riemann 計量を動かした場合に固有値の振る舞い、特に、0 に収束する正の固有値（小さい固有値）の存在について Colette Anné 氏（フランス、ナント大学）と共同で調べた。

ここで体積を固定しているため、考えているのは極限空間の次元が下がらない非崩壊の場合であるが、この場合でも最良の固有値の評価が不明である。しかし、一般の崩壊の場合よりは考えやすい状況にあり、予想や部分的な結果が知られている状況である。

我々はまず、球面の場合について研究を行った。 m 次元球面上に、与えられた次数 p ($1 \leq p \leq m-1$) と任意の番号 k に対し、Hodge-Laplacian と rough Laplacian (接続 Laplacian) の p -形式の第 k 固有値が 0 に収束するような、非負の断面曲率で体積一定の Riemann 計量の族 $g_{p,L}$ (L はパラメーター) を構成することが出来た。従来の研究では、曲率を制限した場合の結果は無く、今回の我々の構成により「非負の断面曲率」に制限しても出来ることが新たな成果である。さらに、固有値の Mayer-Vietoris 型の評価 (McGowan 評価) を用いて、固有値の下からの評価も得た。特に、Riemann 計量の族のパラメーター L に関するオーダーを明らかにした。

次に、一般の m 次元閉多様体の場合は、上述の Riemann 計量を持つ m 次元球面を一般の m 次元多様体 M に貼り付けることによって構成する。ただし、貼り付けにおいてもはや断面曲率が非負という制限は崩れてしまう。

この貼り付けを行うには、固有値に対する貼り付け定理 (gluing theorem) が必要となるが、Hodge-Laplacian の場合は、既に共同研究者の Colette Anné 氏との研究で得られている (Anné-Takahashi, 2012 年, Tans.AMS) ので、今回、rough Laplacian の場合の貼り付け定理を新たに証明した。すなわち、2つの Riemann 多様体の連結和を取り、一方の多様体を 1 点に潰した場合に、対応する微分形式に作用する rough Laplacian の固有値が残った多様体の固有値に収束することを示した。

なお、我々の rough Laplacian の場合の結果は、Colbois-Maerten (2010 年, Manuscripta Math.) の結果の高次数 $2 \leq p \leq m-2$ の場合への拡張を与えている。

最後に、ここで構成した Riemann 計量の族はいずれも直径が ∞ に発散してしまうので、直径も有界の場合に、小さい固有値は存在しないであろうという Lott の予想 (2004 年) との関係について調べるのが今後の課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Junya Takahashi	4. 巻 6
2. 論文標題 L^2 -harmonic forms on incomplete Riemannian manifolds with positive Ricci curvature	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 75-85
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/math6050075	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Colette Ann'e and Junya Takahashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Small eigenvalues of the rough and Hodge Laplacians under fixed volume	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annales de la Facult'e des Sciences de Toulouse (to appear)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 高橋淳也
2. 発表標題 Partial collapsing and the spectrum of the Hodge-Laplacian
3. 学会等名 多様体上の微分方程式（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 高橋淳也, Colette Ann'e
2. 発表標題 体積一定下での Hodge-Laplacian と rough Laplacian の小さい固有値
3. 学会等名 日本数学会幾何学分会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Nantes 大学			
ドイツ	Jena 大学			