

令和 2 年 6 月 16 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05120

研究課題名(和文) 非可換な群作用をもつラグランジュ部分多様体のFloerコホモロジー

研究課題名(英文) Floer cohomology of Lagrangian submanifolds with non-commutative group actions

研究代表者

入江 博 (IRIYEH, Hiroshi)

茨城大学・理工学研究科(理学野)・准教授

研究者番号：30385489

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：ラグランジュ部分多様体のFloerコホモロジーを中心にシンプレクティック不変量に関する具体的な研究を行った。特に、複素旗多様体という非可換な群が推移的に作用する性質のよい空間の二つの実形の交叉を調べ、実形の位相型が異なる場合(ハミルトンイソトピックとは限らない場合)にも、対の $Z/2Z$ 係数Floerコホモロジーを計算した。さらに、凸体の体積に関するMahler予想を3次元の場合に解決し、その応用として6次元のあるクラスの凸領域におけるハミルトン力学系についての新しい知見が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題の主題であるシンプレクティック不変量を通じて、凸幾何の分野の有名な古典的未解決問題であるMahler予想(1939年)に本質的な寄与ができた。特に、3次元の場合を解決した論文は凸幾何の分野のかなり多くの研究者の興味を喚起し、国際的な波及効果が出ている。Mahler予想は、凸幾何の中でも体積に関わる中心課題の一つであるため、今回の成果の高次元化に向かって、関連する分野の活性化が十分に期待できる。

研究成果の概要(英文)：We carried out concrete research for symplectic invariants, especially, Lagrangian Floer cohomology. In particular, we explicitly calculated the Lagrangian Floer cohomology of a pair of real forms even with different topological types in a complex flag manifold on which a non-commutative group acts transitively. Furthermore, we affirmatively solved the three dimensional case of Mahler's conjecture concerning the volume of convex bodies. As an application, we obtained new knowledge about the Hamiltonian dynamics on a class of six dimensional convex domains.

研究分野：数物系科学

キーワード：Floerコホモロジー ラグランジュ部分多様体 旗多様体 対蹠集合 実形 凸体 Mahler予想 Hofer-Zehnder容量

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

Floer コホモロジーは、1960 年代に提唱された Arnold 予想(ハミルトン系の周期軌道の個数の評価に関する予想)の解決のため Floer により導入された概念である。いくつかの定式化があるが、Floer は 2 次の相対ホモトピーが消えるラグランジュ部分多様体  $L$  に対して Floer コホモロジーを構成し、その場合の Arnold 予想を解決した(文献 )。これは、1980 年代以降の大域シンプレクティック幾何の形成に極めて大きな影響を与え、後で述べるシンプレクティック容量とも関連し、ほぼ同時期に定義されている。1990 年代初頭、Y.-G. Oh は、Floer の構成をラグランジュ部分多様体  $L$  が単調の場合に拡張し(文献 )、Floer コホモロジーをコンパクト型エルミート対称空間の単調な実形  $L$ (全測地的ラグランジュ部分多様体)の場合に計算した(文献 )。現在では、深谷賢治、Oh、太田啓史、小野薫の四氏により、かなり一般的な設定での Floer コホモロジーの基礎理論が確立し(文献 )、シンプレクティック幾何の中核的手法となっている。一方、その明示的な計算や具体的な応用に関しては、当時、実形の一般化であるシンプレクティック多様体  $(M, \omega)$  の反シンプレクティックな対合による固定点集合として得られるラグランジュ部分多様体(Arnold-Givental 不等式)や、ミラー対称性の研究に関連したトーリック多様体のラグランジュトラスファイバーの場合が注目されていた。代表者は、この状況下、実形やトラスファイバー以外で対称性の高いラグランジュ部分多様体に着目し、その Floer コホモロジーの明示的な計算について以下の成果を得ていた。

- (1)  $(p^2 - 1)$ 次元複素射影空間の中にラグランジュ部分多様体として埋め込まれた射影ユニタリ群  $PU(p)$  の  $Z_2$  係数 Floer コホモロジーの決定(文献 )
- (2) コンパクト型エルミート対称空間のハミルトンイソトピックとは限らない単調な二つの実形  $L_1$  と  $L_2$  の対の  $Z_2$  係数 Floer コホモロジーの決定(文献 )

上記の(2)は、Oh 氏の文献 ) 中の open problem の一つで長く未解決であったものである。このように、実形またはトラスファイバー以外のラグランジュ部分多様体、位相型が異なるラグランジュ部分多様体  $L_1$  と  $L_2$  の対の Floer コホモロジーの明示的な研究は当時まだ少なく、具体的な計算例を増やす必要性があった。

### 2. 研究の目的

本研究では、上記の代表者による成果をさらに深化発展させる形で以下の二つの設定で  $Z_2$  係数 Floer コホモロジー  $HF(L)$  および  $HF(L_1, L_2)$  の明示的な計算とその応用を主目的とした。

- (1) 複素旗多様体の合同とは限らない実形の対の Floer コホモロジー  $HF(L_1, L_2)$  の決定  
コンパクト型エルミート対称空間の場合の研究の自然な一般化であり、複素旗多様体の枠組みで文献 ) の結果を拡張することで、現れる実形の対の種類が各段に増える。
- (2) 複素射影空間の中の第二基本形式が平行なラグランジュ部分多様体の Floer コホモロジー  
このクラスのラグランジュ部分多様体  $L$  は、実形ではないが対称空間の構造を持つ極小部分多様体であり、分類されている。既約なものは、実射影空間、射影ユニタリ群  $PU(p)$  (ただし、 $n=p^2 - 1$ ) と他 3 種類がある。最初の二つについては、 $Z_2$  係数 Floer コホモロジーはスペクトル系列と  $L$  のコホモロジーの情報から間接的に計算されている。ここでは、 $L$  に境界を持つ正則円盤の分類を行い、他の 3 種類も含めてより詳しい情報を得ることを計画する。

さらに、他のシンプレクティック不変量、特に、シンプレクティック容量に着目し、海外研究者の動向を注視しながら新しい研究の展開を探る。

### 3. 研究の方法

- (1) 複素旗多様体の合同とは限らない実形の対の Floer コホモロジー  $HF(L_1, L_2)$  に関しては、先行研究のコンパクト型エルミート対称空間の場合の議論の拡張を行う。先行研究では、田崎博之、田中真紀子両氏による実形の交叉の対蹠集合による記述に着目し、対称空間の点対称を用いて、Floer コホモロジーの境界作用素の計算に必要な正則な strip のモジュライ空間に自由な  $Z_2$  作用を構成することによって結果を得た。複素旗多様体の場合にも、ある仮定の下で実形の交叉を一般化された対蹠集合で表すことまではできている。したがって、先行研究の方針に沿って  $HF(L_1, L_2)$  を計算するには、

正則な strip のモジュライ空間上の自由な  $Z_2$  作用の構成  
正則な strip の方程式の線形化写像の全射性

の二つを示す必要がある。

- (2) 複素射影空間の中の第二基本形式が平行なラグランジュ部分多様体  $L$  の Floer コホモロジーについては、 $L$  に境界を持つ正則円盤の分類が中心課題になる。代表者は先行研究(文献 ) において、 $PU(p)$  の最小 Maslov 数を計算する際、 $PU(p)$  に境界を持ついくつかの系列の正則円盤

を具体的に構成した。それらは  $PU(p)$  の極大トーラスに境界が乗っており、当該分野で有名な C.H.Cho 氏によるクリフォードトーラスに境界をもつ場合の正則円盤の分類のアイデア(文献 )を活用できる可能性がある。

(3) 本研究課題の申請時には全く想定していなかったが、Artstein-Karasev-Ostrov により、凸幾何学の古典的未解決問題である Mahler 予想とシンプレクティック不変量の一つである Hofer-Zehnder 容量が関連するという論文(文献 )が出版された。これに触発され、Mahler 予想についてシンプレクティック幾何の立場からの検討を開始した。

#### 4. 研究成果

(1) 複素旗多様体の実形は全測地的なラグランジュ部分多様体である。複素旗多様体の二つの実形の交叉を調べ、実形の位相型が異なる場合(ハミルトンイソトピックとは限らない場合)にも、対の  $Z_2$  係数 Floer コホモロジー  $HF(L_1, L_2)$  を計算した。そのランクはある種のワイル群の軌道の位数としてあらわすことができる。その結果、ハミルトンイソトピーによる変形の下での交点数の最良評価が具体的に得られた。計算に必要な標準的複素構造の regularity(正則な strip の方程式の線型化写像の全射性)の証明は、井川治氏により導入された対称三対の理論(文献 )を用いて既知の方法に帰着させることに成功した。この部分は研究全体の中で最も苦労した部分であるが、その際、平成 29 年度に京都大学数理解析研究所での、田崎博之氏を代表とする RIMS 共同研究(グループ型)「複素旗多様体内の実形の交叉と対蹠集合」の実施が大いに役立った。

以上は、井川治氏(京都工芸繊維大学)、奥田隆幸氏(広島大学)、酒井高司氏(首都大学東京)、田崎博之氏(筑波大学)との共同研究である。論文はほぼ完成しているが、現在仮定している実形の最小 Maslov 数が 3 以上という条件を外した後に投稿する予定である。

(2) 複素射影空間の中の第二基本形式が平行なラグランジュ部分多様体の Floer コホモロジーの研究については、より重要度の高い次の項目(3)を優先することにしたため、アイデアを実行するまでに至らなかった。しかしながら、複素射影空間とともに具体例の計算でよく使われる複素 2 次超曲面の場合について、次の成果を得た。

ユークリッド空間内の単位超球面の等径超曲面のガウス写像による像(以下、ガウス像と呼ぶ)は、複素 2 次超曲面の中の単調なラグランジュ部分多様体を与える。このガウス像に関して、重複度が 1 の場合の 3 系列を除いて、ガウス像がハミルトンイソトピーの下でははずせないことを示した。ガウス像は等径超曲面の巡回群  $Z/gZ$  による商( $g$  は異なる主曲率の数)となるが、この  $Z/gZ$  被覆に対して、Damian により導入された lifted Floer ホモロジー(文献 )が利用できる。lifted Floer ホモロジーに収束するスペクトル系列があり、それを用いると等径超曲面のホモロジーの情報から lifted Floer ホモロジーの非消滅が示せ、結果を得る。特に、異なる主曲率の数が 4 の場合、(1)の状況と異なり非等質な例が多くあり、等質性を仮定せずに結果を得られた点は興味深い。これは、Hui Ma 氏(清華大学)、宮岡礼子氏(東北大学)、大仁田義裕氏(大阪市立大学)との共同研究である。

(3) 凸体の volume product(Mahler 体積)に関する Mahler 予想に関して、本研究課題の申請時には全く想定していなかった大きな進展があった。Mahler 予想とは、ユークリッド空間の中心対称な凸体の volume product(凸体とその極凸体との体積の積)の下からの最適評価に関する予想である。2014 年、Artstein-Karasev-Ostrov により、シンプレクティック容量の一種である Hofer-Zehnder 容量に関する等周不等式と言える Viterbo 予想から、凸幾何学の分野の古典的未解決問題である Mahler 予想(1939 年)が従うという驚くべき結果が発表された(文献 )。この論文に触発され Mahler 予想の研究に着手した。

Mahler 予想は、2 次元の場合は Mahler 自身により 1938 年に解かれている。高次元では、部分的な結果はあるものの一般の場合には 3 次元以上では未解決であった。代表者は、柴田将敬氏(東京工業大学)と共同で予想の 3 次元の場合を解決し、等号成立条件も決定した。この成果は 2020 年 4 月に論文として出版されたが、プレプリント(arXiv:1706.01749)の段階から反響が大きく、凸幾何学の専門家の講演の中でも取り上げられ、代表者も 4 件の国際研究集会での招待講演を行った。また、同論文の equipartition に関する結果の別証明を与える M. Fradelizi 他 4 名によるプレプリント(arXiv:1904.10765)が発表されるなど、すでに国際的な波及効果も出ている。

シンプレクティック幾何との関連では、3 次元中心対称凸体とその極凸体の積の形の 6 次元領域について、Hofer-Zehnder 容量に対する Viterbo 予想が解決でき、この形の領域におけるハミルトン力学系について新たな知見が得られた。当初は、シンプレクティック幾何を利用して Mahler 予想へのアプローチを検討していたが、結果的に、3 次元の Mahler 予想を凸幾何の枠組みで解決しシンプレクティック幾何への応用を得た形になった。

また、3 次元 Mahler 予想の解決のため、volume product を評価するために導入した「符号付体積評価」の方法を拡充して、Mahler 予想の枠組みを離散群作用つきの場合に拡張した問題を考察した。特に 3 次元の場合、3 次直交群の離散部分群の作用をもつ凸体の volume product の下からの最良評価と等号成立条件が、先行研究に含まれないいくつかの系列で得られている。

現在論文を準備中であるが、完成に近づいている。以上は、柴田将敬氏(東京工業大学)との共同研究である。

<引用文献>

- A. Floer, Morse theory for Lagrangian intersections, *J. Differ. Geom.* 28(1988), 513-547.
- Y.-G. Oh, Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I, *Comm. Pure Appl. Math.* 46(1993), 949-993.
- Y.-G. Oh, Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture, *The Floer Memorial volume*, *Progr. Math.*, vol. 133, Birkhauser, Basel (1995), 555-573.
- K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part I, II., *AMS/IP Stud. Adv. Math.* 46.1-2, Amer. Math. Soc., Providence, RI; International Press, Somerville, MA, 2009.
- H. Iriyeh, Symplectic topology of Lagrangian submanifolds of  $CP^n$  with intermediate minimal Maslov numbers, *Adv. Geom.* 17(2017), 247-264.
- H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, *J. Math. Soc. Japan* 65(2013), 1135-1151.
- C. H. Cho, Holomorphic discs, spin structures, and Floer cohomology of the Clifford torus, *Int. Math. Res. Not.* 35(2004), 1803-1843.
- S. Artstein-Avidan, R. Karasev and Y. Ostrover, From symplectic measurements to the Mahler conjecture, *Duke Math. J.* 163(2014), 2003-2022.
- O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, *J. Math. Soc. Japan* 63(2011), 79-136.
- M. Damian, Floer homology on the universal cover, Audin's conjecture and other constraints on Lagrangian submanifolds, *Comment. Math. Helv.* 87(2012), 433-462.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hiroshi Iriyeh, Masataka Shibata	4. 巻 169
2. 論文標題 Symmetric Mahler's conjecture for the volume product in the 3-dimensional case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Duke Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1077-1134
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/00127094-2019-0072	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Iriyeh, Hui Ma, Reiko Miyaoka, Yoshihiro Ohnita	4. 巻 48
2. 論文標題 Hamiltonian non-displaceability of Gauss images of isoparametric hypersurfaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 802-812
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/blms/bdw040	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 6件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Hiroshi Iriyeh
2. 発表標題 A proof of Mahler's conjecture for the volume product of three dimensional convex bodies
3. 学会等名 East Asia Symplectic Conference 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Iriyeh
2. 発表標題 On the volume product of three dimensional convex bodies with symmetries of a subgroup of $O(3)$
3. 学会等名 DGA2019--Differential Geometry and its Applications（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Iriyeh
2. 発表標題 The volume product of convex bodies with discrete symmetries
3. 学会等名 UK-Japan Winter School 2019 Variational problems in Geometry and Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Iriyeh
2. 発表標題 Mahler's conjecture for three dimensional convex bodies and the rigidity of certain symplectic embeddings
3. 学会等名 HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XX & Pacific Rim Complex-Symplectic Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井川治、入江博、奥田隆幸、酒井高司、田崎博之
2. 発表標題 複素旗多様体内の二つの実形のFloerホモロジー
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 入江博
2. 発表標題 凸体に関するMahler予想について
3. 学会等名 2017年度福岡大学微分幾何研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 入江博
2. 発表標題 複素射影空間のLagrange部分多様体のホモロジー的剛性について
3. 学会等名 研究会「対称空間論とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Iriyeh
2. 発表標題 On Mahler's conjecture in the three dimensional case
3. 学会等名 Singularities Symmetries & Submanifolds (the 18th UK-Japan Winter School in Mathematics) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	田崎 博之 (TASAKI Hiroyuki) (30179684)	筑波大学・数理物質系・准教授  (12102)	
研究協力者	酒井 高司 (SAKAI Takashi) (30381445)	首都大学東京・理工学研究科・准教授  (22604)	
研究協力者	井川 治 (IKAWA Osamu) (60249745)	京都工芸繊維大学・基盤科学系・教授  (14303)	

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	奥田 隆幸 (OKUDA Takayuki)  (40725131)	広島大学・先進理工系科学研究科(理)・講師  (15401)	
研究協力者	馬 輝 (Ma Hui)	清華大学(中国)・教授	
研究協力者	宮岡 礼子 (MIYAOKA Reiko)  (70108182)	東北大学・高度教養教育・学生支援機構・総長特命教授  (11301)	
研究協力者	大仁田 義裕 (OHNITA Yoshihiro)  (90183764)	大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  (24402)	
研究協力者	柴田 将敬 (SHIBATA Masataka)  (90359688)	東京工業大学・理学院・助教  (12608)	