様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　６ 月　３ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2020
課題番号：１６Ｋ０５１２２

研究課題名（和文）積分幾何を用いた簡約リー群の無限次元表現の研究

研究課題名（英文）Penrose transform for indefinite Grassmannian manifolds

研究代表者
関口　英子（SEKIGUCHI, Hideko）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：５０２８１１３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：　数理物理学に端を発するペンローズ変換とその一般化について研究した。半単純リー群の表現論の特異な(無限次元)表現論の幾何的実現に視点を置き，当該研究期間においては，二つの互いに双正則ではない複素多様体であり，サイクルスペースが同型である具体例を見出し，その場合のコホモロジーの比較に焦点をあてて研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は当該研究代表者が従前行ってきたペンローズ変換の研究に立脚し，それをさらに深化させ高次元の非コンパクトな複素多様体の上で無限次元表現の幾何的な解明を目指すものである。非コンパクトな複素多様体のコホモロジーは無限次元空間になり，その構造は十分に解明されているとはいえない。半単純リー群の無限次元表現論と積分幾何の手法を用いて，このコホモロジー空間をより精密に理解し，逆にパラメータが特異な場合の無限次元表現の未知の性質を幾何的にとらえるという挑戦的な課題に取り組んでいる。

研究成果の概要（英文）：I have been studying so called the Penrose transform, which originated in mathematical physics. My view point is based on representation theory of semisimple Lie groups, in particular, a geometric realization of singular (infinite-dimensional) representations via the Penrose transform. Our main concern is with the characterization of the image of the Penrose transform by means of a system of partial differential equations on the cycle space, e.g., a generalization of the Gauss-Aomoto-Gelfand hypergeometric differential equations to higher degree. During this period, I have focused on the comparison of two indefinite Grassmannian manifolds, which are not biholomorphic to each other, but their Dolbeault cohomologies may have intimate relations.

研究分野：半単純リー群の表現論

キーワード：ペンローズ変換　ユニタリ表現　有界対称領域　表現の分岐則　複素多様体　リー群　グラスマン多様体　積分幾何

１．研究開始当初の背景

半単純リー群の既約ユニタリ表現は，1940 年代より現在に至るまで 70 年以上にわたる深い研究がなされて，既約表現のいくつかの重要な系列は代数・解析・幾何の様々な手法を用いて発見・構成されてきているが，既約ユニタリ表現の分類は大きな未解決問題として残されている。その困難の一つの原因は，無限次元表現の中の特異なパラメータをもつものの解明が難しいことにある。一方，Penrose 変換に関しては以下のことが知られていた。

(1) 重力場のない場の方程式(2 階の微分方程式)の大域解の構成 (Penrose のツイスター理論, 1960 年代; Eastwood, Wells や Gindikin 等による研究, 1980 年代～);

(2) 半単純リー群の離散系列表現をリーマン対称空間上のベクトル束の 1 階の偏微分方程式系の解として構成する Schmid，堀田，Parthasarathy の理論;

(3) Mantini によるペンローズ変換の高次元化と解の構成, 研究代表者によるすべての解の構成;

(4) 特異なパラメータをもつ場合にはペンローズ変換が単射にならないこともある(研究代表者による)。

２．研究の目的

小平-Serre の定理によればコンパクト複素多様体上の coherent 層のコホモロジー空間は常に有限次元になる。一方，複素多様体がコンパクトではない場合，そのコホモロジーの空間は無限次元になりうる。さらに Dolbeault 複体における¥bar¥partial 作用素の像は Frechet 位相において閉になるかどうかは自明ではなく，無限次元のコホモロジー空間が自然なハウスドルフ位相を有するかどうかさえ難しい問題である。本研究は非コンパクトな複素多様体の双正則変換群が推移的に作用する簡約リー群がある場合に，「ペンローズ変換による無限次元表現」の研究を深化させ，正則直線束のパラメータが特異な場合にコホモロジー空間を積分幾何によって特異なユニタリ表現と結びつけようと試みたものである。

３．研究の方法

研究の方法を 4 つのステップに分けて述べる。

(1) 簡約リー群 G の余随伴楕円軌道 X は群 G の作用が双正則となるような複素構造をもつ。さらに，X が対称空間の構造をもつ場合に着目し，そのサイクル空間 Z(X) を G が古典型の群の場合に考える。

(2) サイクル空間 Z(Y) をもつ複素多様体 Y であって，Y 自身は X と双正則ではないが，サイクル空間 Z(X) と Z(Y) は同型となるようなものを探す。

(3) それらに対して，積分幾何の研究を行う。

(4) p+q 次元の複素ベクトル空間に符号 (p,q) の不定値エルミート計量を入れ，この計量に関して正定値となる k 次元平面からなる集合を X とおく。X を群 U(p,q) のある余随伴軌道と同一視する。X には複素多様体の構造が入り，さらに，自然に(不定符号の)ケーラー計量が定義される。X はコンパクトではないが，通常のグラスマン多様体 Gr_k(Cp) をコンパクトな部分多様体として含む。この通常のグラスマン多様体 Gr_k(Cp) と同型な部分多様体をパラメトライズする空間(サイクル空間) Y に複素多様体の構造が入り，さらにこのサイクル空間を明示的に決定する。

４．研究成果

簡約リー群の既約認容表現は，1980 年代に Langlands による行列要素の漸近挙動を用いた手法，minimal K-type とリー環の相対コホモロジー理論を用いた Vogan による手法，旗多様体における D 加群を用いた手法の 3 通りのアプローチで分類が完成したが，その中でユニタリ化可能なものを決定するユニタリ双対の分類問題は長年の未解決問題として残っている。例えば，不定値ユニタリ群などの古典群の既約ユニタリ表現の完全な分類は現在も未解決である。その困難の一つの理由は，既約な無限次元表現の多くのものはパラメータ付きで構成されるが，パラメータが特異な点に到達すると，その加群の挙動を理解することが難しくなることにある。

本研究では，不定値ユニタリ群の特異なパラメータλをもつ A_q(λ)加群を 2 つの相異なる非コンパクトな複素多様体上の正則直線束のコホモロジー空間(先の不定値ユニタリ群の無限次元表現空間)に構成し，それぞれに定義されるペンローズ変換の像がみたす微分方程式系の比較を行った。

Berger の分類理論における半ケーラー対称空間 X とは，単純リー群 G の対称空間 G/H であって，その固定部分群 H がコンパクトな 1 次元の中心を含むものである。半ケーラー多様体の典型例としてある不定値計量をもつグラスマン多様体に焦点を当てた。本研究では，この半ケーラー多様体を対象とし，X 上の正則直線束 L に値をもつ k 次 \bar \partial 閉形式を k 次元のコンパクト複素部分多様体上で積分することによって，サイクルをパラメトライズする多様体 Z (サイクル空間)上のベクトル束 V 値の函数が得られる。ここで V は L によって定まる Z 上の正則ベクトル束である。H*(X,L) も H*(Z,V) も無限次元のベクトル空間となるが，

H*(X,L) から H0(Z,V) への対応が(一般化された意味での)Radon-Penrose 変換として定義できる。この変換の単射性を示し，その像を表現論を援用して偏微分方程式の解空間として具体的に決定した。

さらに，不定値ユニタリ群の等質多様体として表される双正則同型ではない 2 つの複素多様体上の無限次元のコホモロジーが変換群の作用をこめて同型となりうるための十分条件を非コンパクトな複素多様体における積分幾何を用いて見出した。

これらの研究について，国際研究集会等で発表をおこなった。本研究期間中に見出された結果は，高次元のツイスター対応の例を与えることが期待でき，今後優先的に取り組みたいと考えている。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計3件（うち招待講演　3件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 Hideko Sekiguchi	
2．発表標題 Representations of semisimple Lie groups and Penrose transform	
3．学会等名 トポロジー火曜セミナー，リー群論・表現論セミナーの合同セミナー（招待講演）	
4．発表年 2017年	

1．発表者名 Hideko Sekiguchi	
2．発表標題 Representations of semisimple Lie groups and Penrose transform	
3．学会等名 Tokyo-Lyon Conference in Mathematics（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2018年	

1．発表者名 Hideko Sekiguchi	
2．発表標題 Representations of Semisimple Lie Groups and Penrose transform	
3．学会等名 Colloquium, Reims University（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2016年	

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Integral Geometry, Representation Theory and Complex Analysis	2020年～2020年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Reims University			