

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 4 年 5 月 25 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2021

課題番号：16K05123

研究課題名(和文) 等質および局所等質多様体上の複素幾何構造についての研究

研究課題名(英文) Complex geometric structures on homogeneous and locally homogeneous manifolds

研究代表者

長谷川 敬三 (HASEGAWA, KEIZO)

大阪大学・理学研究科・招へい教授

研究者番号：00208480

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクト等質局所共形ケーラー多様体に関する構造定理として「コンパクト等質局所共形ケーラー多様体は複素旗多様体上の1次元複素トーラスをファイバーとする正則ファイバーバンドルの構造を持つ。また、その付随するリー微分形式は平行である、すなわちVaisman構造を持つ」を得た。この結果の一つの拡張として、ユニモジュラー等質・佐々木多様体およびVaisman多様体の分類および構造定理を得た。特に、ユニモジュラーVaismanリー環は、Modificationによって、 $R \times \mathfrak{sl}(2)$ 、 $R \times \mathfrak{su}(2)$ 、 $R \times \mathfrak{n}$ のいずれかに分類される。ここで、 R は実数、 \mathfrak{n} はHeisenbergリー環。

研究成果の学術的意義や社会的意義

複素幾何学の分野において、ケーラー構造は最も基本的な幾何構造である。近年、非ケーラー複素多様体の発見に始まって、現在では非ケーラー幾何学としての研究分野も確立しつつあり、その重要性も認識されている。非ケーラー多様体の中でもケーラー構造に近いものとして、局所共形ケーラー構造を持つものがあり、複素曲面に限れば非ケーラー曲面の多くはこの局所共形ケーラー構造をもつことが知られている。本研究において、高次元の局所共形ケーラー多様体として、等質多様体を研究対象にし、特に、コンパクト群や冪零群を含むユニモジュラー・リー群の等質多様体について、その不変な局所共形ケーラー構造、Vaisman構造を決定した。

研究成果の概要(英文)：We have shown that a compact homogeneous locally conformally Kähler manifold is a holomorphic fiber bundle over a complex flag manifold with fiber a 1-dimensional complex torus; and its structure is of Vaisman type, that is, the associated Lee form is parallel. Later, we partially extended the result, obtaining the structure theorem for Homogeneous Sasaki and Vaisman manifolds of unimodular Lie groups. In particular, we have shown that a unimodular Vaisman Lie group is, up to modification, $R \times \mathfrak{sl}(2)$, $R \times \mathfrak{su}(2)$ or $R \times \mathfrak{n}$, where \mathfrak{n} is the Heisenberg Lie algebra. Later, we could have determined all possible modifications for these Lie algebras, thus obtaining a complex classification of unimodular Vaisman Lie groups. Similarly, we have seen that a unimodular Sasaki Lie algebra is $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{su}(2)$, or a modification of \mathfrak{n} .

研究分野：複素幾何学

キーワード：局所共形ケーラー構造 Vaisman構造 佐々木構造 ユニモジュラー・リー群 冪零リー群 Heisenbergリー群

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

非ケーラー多様体上のケーラー構造に近い局所共形ケーラー構造に関する研究が近年盛んになり、非ケーラー複素曲面である小平曲面、ホップ曲面および井上曲面上の局所共形ケーラー構造に関する諸結果が知られていた。これらの曲面の多くは等質または局所等質な局所共形ケーラー多様体として捉えられる。一方、コンパクト等質ケーラー多様体の構造定理は、松島、Borel-Remmert によって、複素トーラスと複素旗多様体の直積に双正則であることが知られていて、さらに非コンパクトの場合を含む等質ケーラー多様体の構造定理が中島-Dorfmeister によって最終的に決定されていた。長谷川 (研究代表者) は神島氏 (研究分担者) および Cortes (研究協力者)、Aleksseevsky (研究協力者) とともに等質局所共形ケーラー多様体の構造定理および分類問題に興味を持ち研究に取り組むこととした。

2. 研究の目的

等質局所共形ケーラー多様体の構造定理および分類問題の解決。関連して、局所共形ケーラー構造で、いわゆる Lee 形式が計量に関して平行な Vaisman 構造、佐々木構造に関する考察。

3. 研究の方法

等質局所共形ケーラー多様体、等質 Vaisman 多様体および等質佐々木多様体の研究は、局所共形ケーラー構造、佐々木構造の解析幾何学的な考察と等質多様体としての代数的な考察の両面から考察する必要がある。関連する先行研究も多岐にわたっている。共同研究により効率的な研究が可能となる。さらに、研究活動の一環として研究会を開催し講演、ディスカッション、研究打ち合わせの機会を持つことでより広い視野を持つことができる。本研究の遂行期間において、次の研究集会を開催した。

国際研究集会「Complex Geometry and Lie Groups」(複素幾何学とリー群)

第5回：2018年6月11日～15日、フィレンツェ、イタリア

第6回：2021年2月15日～20日、新潟市、オンライン

4. 研究成果

コンパクト等質局所共形ケーラー多様体の構造定理として「コンパクト等質局所共形ケーラー多様体は複素旗多様体上の1次元複素トーラスをファイバーとする正則ファイバーバンドルの構造を持ち、またその付随するリー微分形式は平行になる、すなわち常に Vaisman 構造を定義する」を得た。この結果は [K. Hasegawa and Y. Kamishima, Compact homogeneous locally conformally Kähler manifolds, Osaka Journal of Mathematics (2016)] および [D. Aleksseevsky, V. Cortes, K. Hasegawa and Y. Kamishima, Homogeneous locally conformally Kähler and Sasaki manifolds, International Journal of Mathematics (2015)] に掲載された。コンパクト等質多様体はコンパクト・リー群による等質多様体として捉えられるが、コンパクト・リー群、冪零リー群および簡約リー群を含むユニモジュラー・リー群による等質局所共形ケーラー多様体に関して、次の結果を得た。1. 単連結ユニモジュラー等質 Vaisman 多様体 M は、 $M=R \times S$ と表される。ここで、 R は実数、 S は単連結等質ユニモジュラー佐々木多様体、さらに、 S は単連結簡約等質ケーラー多様体 N 上の量子化、として捉えられる。2. N は複素アフィン空間、複素旗多様体 (コンパクト半単純型) および等質ケーラー多様体 (非コンパクト半単純型) のケーラー積として表される。3. ユニモジュラー Vaisman リー群のリー環は、Modification によって、 $R \times \mathfrak{sl}(2)$ 、 $R \times \mathfrak{su}(2)$ 、 $R \times \mathfrak{n}$ のいずれかに分類される。ここで、 R は実数、 \mathfrak{n} は奇数次 Heisenberg リー環。並行して、ユニモジュラー佐々木リー群のリー環は、Modification によって、 $\mathfrak{sl}(2)$ 、 $\mathfrak{su}(2)$ 、 \mathfrak{n} のいずれかに分類される。特に、冪零リー群に関しては、冪零 Vaisman リー環は $R \times \mathfrak{n}$ として、冪零佐々木リー環は Heisenberg リー環 \mathfrak{n} として、それぞれの上の標準的な Vaisman および佐々木構造をもつものとして決定される。一方、 $R \times \mathfrak{sl}(2)$ 上には Vaisman 型でない局所共形ケーラー構造も定義されることを示した。これらの結果は [D. Aleksseevsky, K. Hasegawa and Y. Kamishima, Homogeneous Sasaki and Vaisman manifolds of unimodular Lie groups, Nagoya Journal of Mathematics (2019)] に掲載された。さらに、上記の結果3について、ユニモジュラー Vaisman リー環およびユニモジュラー佐々

木リー環の Modification を決定することで、ユニモジュラー Vaisman リー環およびユニモジュラー佐々木リー環のそれぞれの具体的な構造を含めた完全な分類を決定した。結果は [V. Cortes and K. Hasegawa, Unimodular Sasaki and Vaisman Lie groups, arXiv:2004.02112 (2021 年 5 月改訂)] に掲載し、現在学術雑誌に投稿中である。またこの論文において、 $R \times \mathfrak{sl}(2)$, $R \times \mathfrak{su}(2)$, $R \times \mathfrak{n}$ 上のすべての不変な複素構造を決定し、それぞれ、 $H \times C$, $C^2 - \{0\}$, C^n に双正則であることを示した。ここで、 C は複素数、 H は複素上半平面。この結果の使用して、後に、非退化 CR リー群の決定の問題の取り組みの中で 冪零非退化 CR リー群は Heisenberg リー群であり、その CR 構造を具体的に決定することができた。

本研究課題は、等質および局所等質多様体上の複素幾何構造の研究として、非ケーラー構造である局所共形ケーラー構造と関連する Vaisman 構造、佐々木構造に関する基本的な結果を得ることで、新たな研究課題への橋渡しとすることができた。上記の冪零非退化 CR リー群の決定問題の解決はその一つである。現在、非退化ユニモジュラー CR リー群の決定問題、等質多様体上の不変とは限らない複素幾何構造とその Moduli (複素変形) の問題等に取り組んでいる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Enoyoshi Kanako, Tsukada Kazumi	4. 巻 43
2. 論文標題 Lagrangian submanifolds of S^6 and the associative Grassmann manifold	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 170-192
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2996/kmj/1584345693	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 D. Alekseevsky, K. Hasegawa and Y. Kamishima	4. 巻 8
2. 論文標題 Homogeneous Sasaki and Vaisman manifolds of unimodular Lie groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1-14
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj.2019.34	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Yoshinobu Kamishima	4. 巻 9
2. 論文標題 On quaternionic 3 CR-structure and pseudo-Riemannian metric	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 114-129
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazumi Tsukada	4. 巻 203
2. 論文標題 Transversally complex submanifolds of a quaternion projective space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 223-233
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Hasegawa and Y. Kamishima,	4. 巻 53
2. 論文標題 Compact Locally conformally Kaehler manifolds,	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 683-703
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Keizo Hasegawa
2. 発表標題 Sasaki and CR Lie groups - construction and classification problems
3. 学会等名 Special Geometry, Mirror Symmetry and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 長谷川敬三
2. 発表標題 Unimodular Sasaki and CR Lie groups
3. 学会等名 幾何学セミナー, 大阪大学理学研究科 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 長谷川 敬三
2. 発表標題 Complete classification of unimodular Sasaki and vaisman Lie groups
3. 学会等名 第25回国際複素幾何学シンポジウム (金沢) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keizo Hasegawa
2. 発表標題 Homogeneous Sasaki and Vaisman manifolds of unimodular Lie groups
3. 学会等名 Differential Geometry Seminar, University of Hamburg (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshinobu Kamishima
2. 発表標題 Smooth rigidity of compact aspherical locally homogeneous manifolds and Application to Geometric structures
3. 学会等名 JNU-KAIST Geometric Topology Fair: 韓国 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Keizo Hasegawa
2. 発表標題 Locally conformally Kaehler homogeneous spaces of unimodular Lie groups,
3. 学会等名 The 8-th TIMS-OCAMI-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	神島 芳宣 (Kamishima Yoshinobu) (10125304)	城西大学・理学部・客員教授 (32403)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	塚田 和美 (Tsukada Kazumu) (30163760)	お茶の水女子大学・ ・名誉教授 (12611)	
研究分担者	守屋 克洋 (Moriya Katsuhiro) (50322011)	筑波大学・数理物質系・助教 (12102)	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	コルテス (Cortes Vicente)	University of Hamburg・Professor	
研究協力者	アレクシーフスキー (Alekseevsky Dmitri)	Russian Academy of Science・Professor	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Complex Geometry and Lie Groups, Niigata, ONLINE	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Complex Geometry and Lie Groups, Ferenze, Italy	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Quaternionic Differential Geometry and its related Topics, Tokyo	開催年 2016年～2016年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	ハンブルグ大学			
ロシア連邦	ロシア・アカデミー			

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	ハンブルグ大学			
ロシア	ロシア・アカデミー			