

令和 5 年 6 月 1 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05125

研究課題名（和文）Vafa-Witten不変量の研究

研究課題名（英文）Studies in the Vafa-Witten invariants

研究代表者

田中 祐二（Tanaka, Yuuji）

名古屋大学・多元数理科学研究科・博士研究員

研究者番号：00647993

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：Thomasと射影曲面上のVafa-Witten不変量の定式化を行い様々な予想を確かめた。Kuhnと射影曲面上の数え上げ不変量に対する爆発公式を示し、それを用いてKuhn, Leighと安定層のモジュライの仮想 $\chi_y$ 種数の爆発公式を保型関数を用いて表した。Gross, Joyceと籠の表現のモジュライの壁越え公式をJoyceの頂点代数の理論を用いて示した。Joyce, Upmeyerとゲージ理論的モジュライの向きを調べる新しい手法を開発した。Vafa-Witten理論およびKapustin-Witten理論の解析的研究も行い、Liu, Rayanとは後者と非可換Hodge理論の関係を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

射影曲面上のVafa-Witten不変量の数学的定式化は20年以上なされていなかったものであり、この研究は多くの後続研究を生んでいる。仮想 $\chi_y$ 種数の爆発公式はこの不変量の生成関数の計算に決定的な役割を果たし現在様々な研究が進行中である。籠の表現のモジュライの壁越え公式は最近Joyceによって射影曲面上でも同種の公式が成立する事が示されている。モジュライ空間の向きに関する研究は、その後のゲージ理論的モジュライ空間の向きの問題に関する様々な研究で本質的に使われているものである。Vafa-WittenおよびKapustin-Witten理論における解析的研究は今後の研究の基礎となるものである。

研究成果の概要（英文）：Thomas and myself formulated Vafa-Witten invariants for projective surfaces and confirmed various conjectures. Kuhn and myself proved a blowup formula for enumerative invariants on projective surfaces. By using this blowup formula, Kuhn, Leigh, and myself obtained a modular expression of the blowup formula for the virtual  $\chi_y$  genera of the moduli spaces. Gross, Joyce, and myself proved a wall-crossing formula for the moduli of representations of a quiver by using Joyce's theory of vertex algebras. Joyce, Upmeyer, and myself developed new methods to study orientations for gauge-theoretic moduli spaces. I also investigated analytic aspects of the Vafa-Witten theory and the Kapustin-Witten one, furthermore, Liu, Rayan, and myself clarified a relationship between the latter and the non-abelian Hodge theory.

研究分野：ゲージ理論

キーワード：完全障害理論 仮想基本類 壁越え公式 ウーレンベック・コンパクト化 ゲージ理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

1990年代中頃に物理学者の Vafa と Witten は、Seiberg-Witten による  $N=2$  超対称 Yang-Mills 理論の低エネルギー有効領域における厳密解の導出という驚くべき研究に誘発され、4次元多様体上の  $N=4$  超対称位相的 Yang-Mills 理論の分配関数を調べ、そこでは  $S$  双対性(分配関数のある種の保型性)が成立しているという予想を提出した。ここで分配関数とは Vafa-Witten により導入されたゲージ理論的方程式の解のモジュライ空間から定まる「Vafa-Witten 不変量」の足し上げで定義されるものである。当時、Vafa と Witten は  $P^2$  と  $K3$  曲面の場合この不変量は反双対接続のモジュライ空間の Euler 標数であると考えたが、これらの場合は Göttsche、吉岡らによる代数幾何学的研究、また ALE 空間の場合は中島の幾何学的表現論における結果からこの予想が正しいことが従う。しかし、一般の場合には、この不変量の正しい数学的定式化さえ 20 年以上知られていなかった。この研究計画開始当初、研究代表者はこの理論の解析的側面を調べておりその指針あるいは例証となる代数幾何学的先行研究はないかと考えたが、Higgs 層を含む場合ではそのような代数幾何学的研究がまったく無かったため、Hitchin-Kobayashi 対応の論文を書いた上で代数幾何学的研究を遂行するための準備も進めていた。

## 2. 研究の目的

- (1) 研究対象である 4次元多様体が射影曲面の場合に Vafa-Witten 不変量を定式化する。またそれを具体例で計算し Vafa と Witten による不変量の分配関数(生成関数)が持つ保型性に関する予想が成立するかを検証する。
- (2) 上述の Vafa と Witten の理論に関連して、Göttsche と Kool は射影曲面上の半安定層のモジュライ空間の仮想 Euler 標数や仮想  $\chi_Y$  種数の生成関数がある普遍関数と Seiberg-Witten 不変量を用いて記述できるであろうという予想を提議し幾つかの例で確認しているが、その中でこれらの不変量に対して成立するであろう爆発公式についても予想を立てている。この Göttsche と Kool の爆発公式を証明する。
- (3) 代数多様体上の半安定層のモジュライあるいは幾何学的商を用いて定義される対象はそれが厳密な意味で半安定な対象を含まない場合、もしその上に完全障害理論を構成することが可能であれば、それから得られる仮想基本類を用いて変形不変量を定式化することができる。しかし、一般の場合、すなわち、モジュライ空間が厳密な意味で半安定な対象を含む場合にこの方法をそのまま適用することはできない。この問題は想像以上に難しく、現時点では、個別の状況に応じたもの、すなわち、Donaldson-Thomas 不変量における Joyce-Song の方法および Donaldson 不変量における望月拓郎のそれなどが知られている。この問題に対して、種々のゲージ理論的モジュライ空間の仮想基本類の定式化を、それが厳密な意味で半安定な対象を含む場合には、Joyce によるモジュライ空間のホモロジー上の頂点代数を用いて同一の枠組みで構成することはできないかという問題を考える。この計画では、まず具体的に籐の表現のモジュライの場合にそれが可能であるかどうかを詳細に調べる。
- (4) 並行して同種の問題に対して解析的な研究を行う。Vafa-Witten 不変量をより一般の 4次元多様体に対して定義するためには解析的研究を進展させる必要がある。ここでは、その一歩として、4次元多様体がケーラー曲面あるいはシンプレクティック多様体の場合を考え、この理論におけるゲージ理論的方程式の解の構造、特に解の列に現れる特異集合の構造を明らかにする。また関連する Kapustin-Witten 理論に現れる方程式に関してもその性質を調べる。また、ゲージ理論的変形不変量はモジュライ空間の(仮想)基本類を用いて定式化されるため、そのモジュライ空間の向きを調べることが必須である。この問題に関して、様々な設定において適用できる理論を構築することを考える。

## 3. 研究の方法

- (1) 射影曲面上では、Hitchin-小林対応により考えるべきモジュライ空間は接続層  $E$  と射  $\varphi: E \rightarrow E \otimes K_X$  の組であってある安定性の条件を満たすものとなる。ここで  $K_X$  は  $X$  の標準直線束を表す。このモジュライ空間はコンパクトではないが、射  $\varphi$  の  $C^{\wedge*}$  倍から誘導されるモジュライ空間への  $C^{\wedge*}$ -作用の固定点集合を考えるとそれはコンパクトとなる。そこでモジュライ空間上に  $C^{\wedge*}$ -同変障害理論を構成しそれが Behrend-Fantechi の

意味で完全であることを示すことを考える．そして，それから構成される  $C^*$ -作用の固定点集合の仮想基本類を用いて変形不変量を定式化する．また，モジュライ空間が半安定な対象を含む場合は，Behrend-Fantechi の方法を直接使うことができないため，ここではスペクトラル対応により Joyce-Song の方法を経由することで Vafa-Witten 不変量を定式化することを試みる．

- (2) 中島-吉岡は  $P^2$  の爆発上に偏屈接続層を導入しそのモジュライ空間を考えることで  $P^2$  および  $P^2$  上の枠付き層のモジュライ空間を補完し，さらにこれらの間の壁越え公式を調べることで爆発公式を示している．我々はこれを一般の射影曲面の場合に完全障害理論付きで証明する．また，中島-吉岡の証明は望月拓郎の enhanced master space の方法を用いるものであるが，我々の場合ではモジュライ空間の幾何学商的記述が無いため技術的に困難となる．この点に関しては Kiem-Li による方法を取り入れることでその議論を我々の設定でも働くようにし中島-吉岡型の壁越え公式を仮想基本類の場合に証明する．それをもとに仮想基本類の場合の爆発公式を得ることを考える．
- (3) Joyce はゲージ理論に現れる種々のモジュライ空間のホモロジー上に頂点代数を構成しているが，それは仮想基本類が定義されるホモロジー理論上に Lie 括弧積の構造を誘導する．この Lie 括弧積を用いて，ゲージ理論的モジュライ空間の間の壁越え公式を定式化しそれを用いてモジュライ空間が厳密に半安定な対象を含む場合に仮想基本類を定式化することを考える．モジュライ空間が籠の表現のその場合は，実は Joyce-Song による一般化 Donaldson-Thomas 不変量との類似があるためそれを経由して変形不変量を定式化することを試みる．
- (4) Taubes は 3 次元および 4 次元多様体上の  $SL(2, \mathbb{C})$  接続の研究で解の列の極限に現れる特異集合を調べているが，実は，Vafa-Witten の理論や Kapustin-Witten のそれにおける方程式の解の列も同種の振る舞いをするため Taubes の手法を用いてそれらを調べることを考える．また，ゲージ理論的モジュライ空間の向きは，個々の設定に現れる偏微分方程式の線形化作用素に族の指数定理を適用する事で考察可能となるが，従来の方法をトポロジーの理論を発展させることでさらに精密化する．また種々の問題に適用できるよう汎用性のある定式化を行う．

#### 4. 研究成果

- (1) Thomas と共同で Vafa-Witten 理論の代数幾何学的研究を進め，まず半安定な対象を含まない場合にモジュライ空間の仮想基本類を構成し変形不変量を得ることに成功した．さらに半安定対を含む場合の研究も進め，その場合には Joyce-Song の方法を用いることでこの不変量の定式化を行った．いくつかの場合にこれらの不変量の分配関数の計算も行ったが，それらが 20 年以上前に Vafa と Witten が物理的考察により導きだした分配関数の保型性に関する予想と一致することは非常に驚きだった．この研究は数学および理論物理学両者の様々な分野の研究に影響を与え多くの後続研究を誘発するものとなったようである．また，これらの研究をまとめた論文はそれぞれ Journal of Algebraic Geometry と Pure and Applied Mathematics Quarterly に受理掲載された．
- (2) Kuhn と共同で射影曲面上の安定層のモジュライ空間の仮想基本類に対して中島-吉岡型の爆発公式を証明し，それを用いて例えば望月拓郎による射影曲面上で仮想基本類を用いて定義される Donaldson 不変量が従来の解析的に定義されるそれと我々の仮定の下では一致することの直接証明を得た（この事実自体は Göttsche-Nakajima-Yoshioka による射影曲面上での Donaldson 不変量と Seiberg-Witten 不変量の等価性に関する結果からも間接的に従う．）この爆発公式は曲面上の種々の数え上げ不変量に適用でき様々な応用を生むと期待される．例えば最近，Kuhn および Leigh と共同で射影曲面上の半安定層のモジュライ空間の仮想  $\chi_{g,y}$  種数の生成関数の爆発公式を導出した．これは Göttsche による位相的  $\chi_{g,y}$  種数の生成関数の爆発公式に関する予想とも一致し，障害が消えているときにはそれを解決するものである．また，Göttsche と Kool は射影曲面上の半安定層のモジュライ空間の仮想  $\chi_{g,y}$  種数の生成関数が普遍関数と Seiberg-Witten 不変量を用いて記述できるであろうという予想を提議し幾つかの例で確認しているが，安定層の階数が 2 の場合は我々の爆発公式を用いるとそれが存在する場合には彼らの普遍関数を完全に決定することができ，Vafa-Witten によるこれらの生成関数が持つ保型性に関する予想もそれから従う．これらの研究をまとめた論文 2 篇は arXiv 上でプレプリントを公開している．
- (3) Gross, Joyce と共同で籠の表現のモジュライ空間の基本類が安定性条件を変えたとき

どのように振る舞うかを調べ、それが最近 Joyce によって構成されたモジュライ空間のホモロジー上の頂点代数から誘導される Lie 括弧積を用いて記述できることを示した。また、ゲージ理論、代数幾何学、幾何学的表現論等に現れる種々の「数え上げ不変量」に対する同種の壁超え公式もこの頂点代数から誘導される Lie 括弧積を用いて記述できるであろうという予想を提議した。この研究は厳密な意味で半安定な対象を含む場合の数え上げ不変量の新しい定式化を提案するものでもある。この研究をまとめた論文は *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)* に受理掲載された。

- (4) Vafa-Witten 方程式の解のモジュライ空間および解の列の極限に現れる特異集合の解析も行った。特に、ケーラー曲面上の Vafa-Witten および Kapustin-Witten 方程式の解の列の極限に現れる特異集合はバブルが起こる点を除いては解析集合となることなどを示した論文は *Geometriae Dedicata* に受理掲載された。また、他の解析的研究をまとめた論文が *The Quarterly Journal of Mathematics* および *Glasgow Mathematical Journal* に受理掲載された。さらに、Joyce, Upmeyer と共同で、ゲージ理論の文脈で現れるモジュライ空間 (Vafa-Witten および Kapustin-Witten 理論のそれらを含む) の向き付け可能性および標準的向きの問題に関して一般論を展開し、また様々な新しい手法を開発することで例えば Donaldson 不変量の理論において知られていた結果も大きく一般化した。この研究をまとめた論文は *Advances in Mathematics* に受理掲載された。この論文の結果および手法はその後のゲージ理論的モジュライ空間の向き付けの問題に対する様々な研究で本質的に使われている。また、Liu および Rayan と Kapustin-Witten 理論と非可換 Hodge 理論との関係を明らかにした。この研究をまとめた論文は *European Journal of Mathematics* に受理掲載された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Gross Jacob、Joyce Dominic、Tanaka Yuuji	4. 巻 18
2. 論文標題 Universal Structures in C-Linear Enumerative Invariant Theories	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 068, 61 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2022.068	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Liu Chih-Chung、Rayan Steven、Tanaka Yuuji	4. 巻 8
2. 論文標題 The Kapustin-Witten equations and nonabelian Hodge theory	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 23 ~ 41
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-022-00538-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Joyce Dominic、Tanaka Yuuji、Upmeyer Markus	4. 巻 362
2. 論文標題 On orientations for gauge-theoretic moduli spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 106957 ~ 106957
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2019.106957	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Tanaka, Yuuji	4. 巻 61
2. 論文標題 A perturbation and generic smoothness of the Vafa-Witten moduli spaces on closed symplectic four-manifolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Glasgow Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 471 ~ 486
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0017089518000307	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka Yuuji, Thomas Richard P.	4. 巻 13
2. 論文標題 Vafa-Witten invariants for projective surfaces II: semistable case	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 517 ~ 562
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/PAMQ.2017.v13.n3.a6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Tanaka, Yuuji, Thomas, Richard P.	4. 巻 29
2. 論文標題 Vafa-Witten invariants for projective surfaces I: stable case	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 603 ~ 668
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jag/738	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yuuji Tanaka	4. 巻 199
2. 論文標題 On the singular sets of solutions to the Kapustin-Witten equations and the Vafa-Witten ones on compact Kahler surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 177 ~ 187
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-018-0344-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuuji Tanaka	4. 巻 68
2. 論文標題 Some bounded properties of solutions to the Vafa-Witten equations on closed 4-manifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Quarterly Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1203 ~ 1225
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/qmath/hax015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計11件(うち招待講演 10件/うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Yuuji Tanaka
2. 発表標題 A blowup formula for sheaf-theoretic virtual enumerative invariants on projective surfaces and its applications
3. 学会等名 Physics and Special Holonomy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuuji Tanaka
2. 発表標題 A blowup formula for sheaf-theoretic virtual enumerative invariants on projective surfaces and its applications
3. 学会等名 Gauge Theory, Moduli Spaces and Representation Theory, Kashiwa 2023, In honor of the 60th birthday of Hiraku Nakajima (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuuji Tanaka
2. 発表標題 On a blowup formula for sheaf-theoretic virtual enumerative invariants on projective surfaces
3. 学会等名 Workshop on Mirror symmetry and Related Topics, Kyoto 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yuuji Tanaka
2. 発表標題 On a blowup formula for sheaf-theoretic virtual enumerative invariants on projective surfaces
3. 学会等名 Pacific Rim Complex & Symplectic Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田中祐二
2. 発表標題 On the virtual Euler characteristics of the moduli spaces of semistable sheaves on a complex projective surface
3. 学会等名 第16回代数・解析・幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yuuji Tanaka
2. 発表標題 On the Vafa-Witten theory on closed four-manifolds
3. 学会等名 Special Holonomy: Progress and Open Problems 2018（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yuuji Tanaka
2. 発表標題 Vafa-Witten invariants on projective surfaces
3. 学会等名 Gauge theory and categorification（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yuuji Tanaka
2. 発表標題 Seiberg-Witten type equations on compact symplectic 6-manifolds
3. 学会等名 13th Taiwan geometry symposium（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 田中祐二
2. 発表標題 A construction of Spin(7)-instantons
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yuuji Tanaka
2. 発表標題 A construction of Spin(7)-instantons
3. 学会等名 The second China-Japan geometry conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 田中祐二
2. 発表標題 A construction of Spin(7)-instantons
3. 学会等名 第63回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

## 8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Stanford University			
カナダ	Saskatchewan University			
台湾	National Cheng Kung University			
英国	University of Oxford			
英国	Imperial College London			
ドイツ	マックス・プランク数学研究所			
ノルウェー	オスロ 大学			
スウェーデン	ウプサラ大学			