

令和元年6月7日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05127

研究課題名（和文）グロモフ・ウィッテン理論におけるガンマ構造の研究

研究課題名（英文）Study of the gamma structure in Gromov-Witten theory

研究代表者

入谷 寛 (Iritani, Hiroshi)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：20448400

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：空間の中の曲線を数え上げる理論であるグロモフ・ウィッテン理論において、ガンマ整構造と呼ばれる不思議な整数上の構造が現れる。ガンマ整構造が双有理変換の下でどのように関係しあうか、またガンマ整構造の起源は何か、という問題にとりくみ、多くの成果が得られた。Coates, Corti, Tsengとの研究では、トーリック軌道体に対するホッジ理論的ミラー対称性を確立し、Abouzaid, Ganatra, Sheridanとの研究ではガンマ類をトロピカル幾何の観点から説明することに成功した。またCoatesとの研究では局所射影平面に対するグロモフ・ウィッテンポテンシャルの準保型性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ガンマ整構造がグロモフ・ウィッテン理論の関係（関手性）とどのようにかかわっているかについての理解が深まった。特に接続層の導来圏の半直交分解と、量子コホモロジーの分解とが対応することがトーリック軌道体などの例を通じて理解できたことは重要である。また、ガンマ整構造はガンマ類と呼ばれる超越的な特性類により定まるものであり、その起源は明らかになっていなかったが、トロピカル幾何とStrominger-Yau-Zaslow描像を通じてガンマ類がどのように現れるかについて大きな理解の進展があった。

研究成果の概要（英文）：Gromov-Witten theory concerns counting curves in a given space, and the Gamma-integral structure is a mysterious integral structure appearing in Gromov-Witten theory. We studied the problem that how the Gamma-integral structures are related under birational transformations. We also searched for the origin of the Gamma-integral structure. In joint work with Coates, Corti and Tseng, we established Hodge-theoretic mirror symmetry for toric orbifolds. In joint work with Abouzaid, Ganatra and Sheridan, we explained the Gamma class from a viewpoint of tropical geometry. Also, in joint work with Coates, we showed the quasi-modularity of the Gromov-Witten potential of the local projective plane.

研究分野：幾何学

キーワード：グロモフ・ウィッテン理論 ガンマ整構造 ミラー対称性 量子コホモロジー トロピカル幾何 保型性 軌道体 導来圏

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

グロモフ・ウィッテン不変量はシンプレクティック多様体の概正則曲線を数え上げる不変量であり、それを用いてコホモロジー環の変形である量子コホモロジーが定義される。研究代表者や Katzarkov-Kontsevich-Pantev らは量子コホモロジー（正確には量子コホモロジーの定める微分方程式系）に対してガンマ整構造という整数上の構造（局所系）を導入していた。ガンマ整構造がなぜ現れるかという理由は明らかになっていない一方で、量子コホモロジーのストークス構造やミラー対称性との整合性が多い例で観察されていた。またガンマ整構造は多様体の接続層の導来圏と量子コホモロジーとを結び付けるものであり、双有理幾何と量子コホモロジーの間の関係を理解するうえで鍵となる構造と考えられる。例えば多様体のクレパントな双有理変換の下で、導来圏の間の同値がガンマ整構造を通じて量子コホモロジーの間の同型を誘導することが観察されていた。ガンマ整構造とグロモフ・ウィッテン理論の間の関係をより深く理解し、またガンマ整構造の起源を理解することが求められていた。

2. 研究の目的

(1) グロモフ・ウィッテン理論（量子コホモロジー）の関手性を、ガンマ整構造を通じて理解する。特に、双有理変換の下での接続層の導来圏の変化と量子コホモロジーの変化とをガンマ構造を通じて結び付ける。クレパントな双有理変換だけでなく、フリップ等の非クレパントな双有理変換の場合も研究し、導来圏の半直交分解と量子コホモロジーとの関係を理解する。

(2) 高種数のグロモフ・ウィッテン理論は種数 0 の理論（量子コホモロジー）の量子化ととらえることができる。研究代表者は Tom Coates との共同研究において高種数グロモフ・ウィッテンポテンシャルの住むべき空間であるフォック層の理論を構築していた。フォック層の研究をさらに進め、高種数ポテンシャルの大域的性質、特に予想される準保型性や、コーニフォールド点での振る舞いについて調べる。ここで準保型性はガンマ整構造と関係する。

(3) ガンマ構造はガンマ類と呼ばれる超越的なコホモロジー類によって定義される。ガンマ類はTodd類のある種の平方根とみなすことができるが、その真の起源はよくわかっていない。ガンマ類が現れるシンプレクティック幾何からの説明を与える。

3. 研究の方法

(1) Coates, Corti, Tseng らとの共同研究ではトーリック軌道体に対する Givental 型のミラー定理を証明していた。このミラー定理はトーリック軌道体（やその中の完全交叉）に対する種数 0 のグロモフ・ウィッテン理論を決定するものである。このミラー定理を使うと、トーリック軌道体のグロモフ・ウィッテン理論はランダウ・ギンズブルグ模型と呼ばれるミラーの幾何学から決まることが分かる。このミラーを使うことによってトーリック軌道体の量子コホモロジー（および高種数グロモフ・ウィッテン理論）の関手性を調べ、ガンマ整構造との関係を理解する。

(2) 物理学者の Aganagic-Bouchard-Klemm らは局所射影平面の高種数グロモフ・ウィッテンポテンシャルが準保型関数であることを予想していた。種数 0 の理論と高種数の理論とを関係づける Givental-Teleman の公式と、上に述べたフォック層の枠組みを使ってこの予想に取り組む。局所射影平面のミラーはあるレベル構造を持つ楕円曲線の族で与えられるが、フォック層をこの族の底空間に構成することにより、グロモフ・ウィッテンポテンシャルの準保型性を証明する。さらにコーニフォールド点の周りでのポテンシャル関数の振る舞いを調べる。

(3) ガンマ類が現れる理由について、トロピカル幾何と Strominger-Yau-Zaslow 予想の観点から研究を行う。ガンマ類はミラー多様体の周期の漸近展開に現れることが予想されているが、このことの原因を Strominger-Yau-Zaslow により予想された双対トーラスファイブレーションを使って幾何学的に理解する。ミラー多様体の周期にゼータ値や元々の多様体の特性数が現れる理由を調べる。

4. 研究成果

(1) Coates, Corti, Tseng との共同研究では、以前に得られていたミラー定理を発展させて、トーリック軌道体の大同変量子コホモロジーに対するホッジ理論的ミラー対称性を確立した。トーリック軌道体のミラーはあるランダウ・ギンズブルグ模型により与えられるが、本研究ではランダウ・ギンズブルグ模型に対数的特異性を付加して部分コンパクト化し、極大複素構造極限に沿って対数的特異性をもつ形式的な齋藤構造を構成した。また齋藤構造上の高次留数ベアリングを振動積分の漸近展開を用いて構成した。そのうえで、齋藤構造が大量子コホモロジーに付随する D 加群（量子 D 加群）と同型になり、高次留数ベアリングが量子コホモロジーのポアンカレベアリングになる、というのが主結果である。さらに、ミラーの齋藤構造を注意深く解析することにより、大同変量子コホモロジーの収束性を証明することもできた。ここで齋

藤構造と量子D加群との同型は変形パラメータ q に関して解析的になることも証明される。ただし、スペクトル変数 z に関しては形式的にしかならない。本研究成果はプレプリントとして公開し、Journal of Differential Geometry に掲載受理された。

(2) 上述の Coates, Corti, Tseng との共同研究で得られたホッジ理論的ミラー対称性の結果を用い、トーリック軌道体の非クレパントな変換の下での量子コホモロジー（および量子D加群）の変化を調べた。まず、非クレパントな変換の下で、量子D加群の間に形式的な分解があることを示した。この証明には(1)で構成した対数的特異性を持つ齋藤構造の構成が重要な役割を果たしており、それを極大体積極限の解析的近傍に拡張することが証明の重要なステップとなる。さらに Givental-Teleman の公式を用いることで、この形式的分解(の量子化)が高種数グロモフ・ウィッテンポテンシャルの間の関係を与えることを示した。福原-Turritin の定理により、量子D加群の形式的分解は(ある角領域上)解析的な分解に持ち上げることが分かる。非クレパントな変換がトーリック部分多様体を中心とする重み付き爆発である場合には、この解析的持ち上げがガンマ整構造を通じて Orlov による接続層の導来圏の半直交分解と対応することを証明した。この結果は Dubrovin 予想(あるいはガンマ予想)の相対版を示したものと考えられる。証明には、ミラー対称性の下で量子D加群のガンマ整構造がレフシェッツ指ぬきの与えるミラーの自然な整構造と対応する、という研究代表者の過去の結果を用いる。本研究成果については2019年度以降に公表・出版する予定である。

(3) Coates との共同研究では、上述の Aganagic-Bouchard-Klemm らの予想を解決し、局所射影平面の高種数グロモフ・ウィッテンポテンシャルの準保型性を証明した。幾何学的量子化の手続きによってミラーの楕円曲線の族の底空間にフォック空間の層(フォック層)を構成し、グロモフ・ウィッテンポテンシャルに対応する大域的切断を構成した。この構成は次のようにしてなされた。局所射影平面をコンパクト化し、その量子コホモロジーとそれに付随する半無限ホッジ構造を考える。コンパクト化の量子コホモロジーは半単純であるので、半無限ホッジ構造に付随したフォック層には Givental-Teleman の公式により自然な大域切断が構成される。次に、半無限ホッジ構造に付随するフォック層から、楕円曲線の族の底空間に定まるフォック層への「制限写像」を構成し、その写像により既に構成した大域切断を送ることで欲しいフォック層の切断が得られる。フォック層の性質から自動的にグロモフ・ウィッテンポテンシャルの準保型性が従う。また準保型性は、ガンマ整構造を通じて導来圏の自己同値群からきていることも観察した。本研究ではさらに幾何学的量子化で現れる様々な偏極について考察し、オービフォールド点やコーニフォールド点に付随するグロモフ・ウィッテンポテンシャルを構成した。また(大域的に一価である)代数的な偏極を導入し、その編曲のもとではフォック層の切断が(準保型関数ではなく)保型関数となることを観察した。局所射影平面は軌道体 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$ のクレパント解消となっており、本研究は $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$ に対するクレパント解消予想の証明も与えている。またコーニフォールド点の周りでの大域切断の特異性を調べ、位数が $2g-2$ の極を持つことを示した。本研究結果はプレプリントとして公開し、Kyoto Journal of Mathematics に掲載受理された。

(4) Abouzaid, Ganatra, Sheridan との共同研究では、ガンマ類がトロピカル幾何と Strominger-Yau-Zaslow 描像を通じてどのように現れるかについて研究を行い、その幾何学的な説明を与えた。Strominger-Yau-Zaslow 描像においては、カラビ・ヤウ多様体とそのミラーは互いに双対なトラスファイブレーションを持つと予想されている。トラスファイブレーションの底空間はトロピカル多様体の構造を持つが、ミラー多様体の周期を底空間であるトロピカル多様体に局所化して計算する、というのが主要なアイデアである。ミラー多様体の周期を極大複素構造極限の近くで計算するとき、その主要項はトロピカル多様体の体積形式で与えられる。それに続く補整項はトロピカル多様体の特異点(ディスクリミナント)に局所化し、それはリーマンゼータ値と多様体の特性数の積で書ける。ここで現れるリーマンゼータ値はトロピカル化における高次の補整項からくるものと解釈できる。本研究では、次元が3以下の場合には Strominger-Yau-Zaslow 描像を仮定して「ガンマ予想」の説明を与えることができた。さらに一般次元の Batyrev ミラー対について、ガンマ予想のトロピカル幾何を用いた別証明を与えた。本研究結果はプレプリントとして公開している。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計9件)

Tom Coates, [Hiroshi Iritani](#), "A Fock sheaf for Givental quantization", Kyoto Journal of Mathematics, 58 (2018), no. 4, 695-864, DOI: 10.1215/21562261-2017-0036, 査読あり

Tom Coates, [Hiroshi Iritani](#), Yunfeng Jiang, "The Crepant Transformation Conjecture for Toric Complete Intersections", Advances in Mathematics, 329 (2018) 1002-1087, DOI: 10.1016/j.aim.2017.11.017, 査読あり

Eduardo González, Hiroshi Iritani, “Seidel elements and potential functions of holomorphic disc counting”, *Tohoku Mathematical Journal* (2) 69 (2017), no. 3, 327-368, DOI: 10.2748/tmj/1505181621, 査読あり

Hiroshi Iritani, “A mirror construction for the big equivariant quantum cohomology of toric manifolds”, *Mathematische Annalen*, 368 (2017), no.1-2, 279-316, DOI: 10.1007/s00208-016-1437-7, 査読あり

Hiroshi Iritani, “Shift operators and toric mirror theorem”, *Geometry & Topology*, 21 (2017), no. 1, 315-343, DOI:10.2140/gt.2017.21.315, 査読あり,

Hiroshi Iritani, Jifu Xiao, “Extremal transition and quantum cohomology: examples of toric degeneration”, *Kyoto Journal of Mathematics*, 56 (2016), no. 4, 873-905. DOI:10.1215/21562261-3664959, 査読あり,

入谷 寛 「量子コホモロジーのガンマ構造について」 *数学* 68 (2016), no. 4, 337-360, 査読あり,

Sergey Galkin, Vasily Golyshev, Hiroshi Iritani, “Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: gamma conjectures”, *Duke Mathematical Journal*, 165 (2016), no.11, 2005-2077, DOI:10.1215/00127094-3476593, 査読あり,

Tom Coates, Hiroshi Iritani, “On the existence of a global neighbourhood”, *Glasgow Mathematical Journal*, 58 (2016), no. 3, 717-726, DOI:10.1017/S0017089515000427, 査読あり

〔学会発表〕(計 23 件)

以下の発表者は全て研究代表者(入谷寛)であるため、省略する。

2019年1月19日-20日, “Gamma conjecture for Fano and Calabi-Yau manifolds”, Beijing Geometry and Physics Colloquium, BICMR(中国, 北京)にて。

2019年1月10日, “Gamma conjecture via tropical geometry”, Workshop on mirror symmetry and related stuff, 清華三亜国際数学論壇(TSIMF), 中国三亜市にて。

2019年12月18日, “Quantum D-modules and toric flips”, Hypergeometric functions and mirror symmetry, 東京大学数理学研究科にて。

2018年12月4日, “Quantum D-modules and toric flips”, D-modules, quantum geometry and related topics, 京都大学数理解析研究所にて。

2018年11月30日, “Gamma conjecture from tropical geometry”, Categorical and analytic invariants VI, 北海道大学数学教室にて。

2018年11月17日, “Toric blow-ups and Gamma-integral structure”, Simons Collaboration on Homological Mirror Symmetry Annual Meeting 2018, Simons Foundation(New York, USA)にて。

2018年9月29日, “Geometric quantization and Gromov-Witten invariants for local P^2 ”, The 4th KTGU Mathematics Workshop for Young Researchers, 京都大学理学部数学教室にて。

2018年7月11日, 「トロピカル幾何とゼータ値」, 談話会, 京都大学数理解析研究所にて。

2018年4月18日, “Toric flips and quantum D-modules”, Enumerative Geometry Beyond Numbers main seminar, MSRI (アメリカ合衆国)にて。

2018年3月27日, “A Fock sheaf associated with the Gromov-Witten potentials of the local P^2 ”, Mirror Symmetry and Enumerative Geometry, MSRI(アメリカ合衆国)にて

2018年1月23日, “Gamma conjecture and mirror symmetry”, Introductory workshop of

the MSRI program “Enumerative geometry beyond numbers” MSRI (アメリカ合衆国)にて。

2018年1月8・9日，“(Semi)-Fano toric mirror symmetry”，a seminar at the program “Periods in Number Theory, Algebraic Geometry and Physics”，Hausdorff Research Institute for Mathematics (ドイツ)にて。

2018年12月1日，“Modularity of Gromov-Witten potentials of the local projective plane”，Categorical and analytic invariants in algebraic geometry V，大阪大学豊中キャンパス南部ホールにて。

2017年6月11日・12日，“Givental quantization and Fock sheaf”，Algebraic Lie Theory and Representation Theory (ALReT) 2017，帝人アカデミー富士にて。

2017年4月28日，“Hodge-theoretic mirror symmetry for toric Deligne-Mumford stacks”，Developments of mathematics at IPMU: in honor of Kyoji Saito，Kavli IPMU(東京)にて。

2016年12月6日，“On the Gamma conjecture associated with toric flips”，Algebraic Geometry and Integrable Systems, Kobe 2016，神戸大学にて。

2016年11月7日，“On the Gamma conjecture associated with toric flips”，Workshop on Homological Mirror Symmetry: Methods and Structures, Institute for Advanced Study (アメリカ合衆国 Princeton)にて。

2016年11月4日，“A proof of Gamma conjecture in some cases via mirror symmetry”，IAS Fall 2016 reading group on Gamma-Integral structures and mirror symmetry, Institute for Advanced Study(アメリカ合衆国 Princeton)にて。

2016年9月15日，“Toric mirror symmetry via Seidel representation”，Workshop on geometric correspondence of gauge theories, ICTP Trieste(イタリア)にて。

2016年8月25日，“Landau-Ginzburg mirror symmetry for toric stacks”，Number Theory and Quantum Field Theory: in Thematic Program “Mathematics of Quantum Field Theory”，IBS Center for Geometry and Physics (浦項, 韓国)にて。

- ⑳ 2016年8月12日，“Mirror symmetry for toric varieties”，weekly seminar ,Higher School of Economics (Moscow)にて
- ㉑ 2016年6月28日，“Mirror symmetry for toric stacks”，Complex Geometry and Mirror Symmetry，東北大学知の創出センターにて。
- ㉒ 2016年6月2日，“Mirror symmetry for toric stacks and its applications”，2016 Chengdu International Conference on Gromov-Witten theory, 中国成都にて。

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：

取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~iritani/>

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。