

令和 3 年 6 月 3 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05132

研究課題名（和文）等質リーマン多様体の局所等長埋め込みと可積分条件

研究課題名（英文）Local isometric imbeddings of homogeneous Riemannian manifolds and integrability conditions

研究代表者

阿賀岡 芳夫（AGAOKA, Yoshio）

広島大学・先進理工系科学研究科（理）・名誉教授

研究者番号：50192894

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：リーマン多様体の局所等長埋め込み問題を中心に研究をすすめた。特に3次元リーマン多様体を4次元ユークリッド空間に埋め込む場合に、リベルツの条件式と曲率に関するある不等式の二つの条件が埋め込み可能となるための必要十分条件を与えていることを、不変式論における記号的方法を駆使して証明した。その応用として、3次元リー群における結果の証明を簡易化し、またwarped product多様体の埋め込み問題を解決した。この問題にモンジュ・アンペール微分方程式が出現することを発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマン多様体の超曲面論は微分幾何学における古典的な問題の一つであるが、3次元空間を4次元ユークリッド空間に埋め込む場合だけが未解決問題として残されていた。そのような状況において、古典的不変式論における記号的方法という、今まで幾何学とは無縁であった手法を用いてこの問題を解決した意義は大きい。この方法を使えば、膨大な長さをもつ式が簡潔に表示されるだけでなく、各種の幾何学的恒等式を計算機を使わずに証明することが可能となり、今後幾何学の分野に大きな影響を及ぼすものと思われる。

研究成果の概要（英文）：Our principal subject in this research is local isometric embedding problem of Riemannian manifolds. In particular, we study the case of three-dimensional manifolds in four-dimensional Euclidean space. We show that Rivertz's condition and some inequality on the curvature give a necessary and sufficient condition that the manifold can be locally isometrically immersed into \mathbb{R}^4 by using the symbolic method in classical invariant theory. As applications, we give another proof of the results for three-dimensional Lie groups, and also solved the problem for warped product manifolds. The appearance of Monge-Ampere type differential equation is one of the surprising discovery in this research.

研究分野：微分幾何学

キーワード：リーマン多様体 等質空間 等長埋め込み 可積分条件 不変式 曲率 記号的方法 モンジュ・アンペール方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

よく知られているように、任意のリーマン多様体は十分高い次元のユークリッド空間に等長に埋め込むことができる(局所的には Janet-Cartan(1926,1927)、大域的には Nash(1956)、Gromov(1986)、Gunther (1991)等の結果)。またどの程度の次元があれば埋め込み可能であるか、その次元の評価に関しても埋め込み写像の微分可能性(実解析的・ C 無限大級など)に応じた結果がそれぞれ得られている。このような一般論が確立している一方で、対称空間・左不変計量をもったリー群など微分幾何学においてなじみの深い空間に対する埋め込み可能な次元の評価に関しては、未だに部分的な結果しか得られていなかった。

申請者は長年にわたって兼田英二氏(大阪大学名誉教授)と対称空間の局所等長埋め込みに関して研究を重ね、多くの空間について局所的に等長埋め込み可能な最小次元のユークリッド空間を確定し、またその最小次元において局所的な剛性(実質上の一意性)の成り立つことを一連の論文において示した。しかしそこで用いられた手法は、多様体の次元を n としたとき、埋め込みの余次元が $n-2$ 次元以下の場合にしか適用できないものであり、一般の n 次元リーマン多様体を局所的に埋め込むためには $n(n+1)/2$ 次元のユークリッド空間が必要とされる事実と合わせて考えると、余次元が $n-2$ よりも更に高い場合にも適用可能となる「判定方法」を新たに編み出す必要があった。

また一方で、等質リーマン多様体でユークリッド空間への(局所)等長埋め込みが構成されている具体的な例としては、小林による対称 R 空間の標準埋め込み(これらはコンパクト型対称空間の一部を成す)、また非コンパクト型のものについては双曲空間しか知られていなかった。

以上のように、局所等長埋め込み問題に関しては解決すべき課題が多く残されている一方、従来の方法でこれらを解決するには限界があることも広く認識されていた。本研究は、このような状況下、新たな手法として表現論的方面からこの問題へアプローチを試みるものである。

2. 研究の目的

本研究では、リーマン多様体の局所等長埋め込み問題において、リーマン計量が等質の場合に、これらが局所等長埋め込み可能となる最小次元のユークリッド空間を確定することを最終目的として開始された。この問題に関しては有名な一般論が確立されている一方、具体的なケースについてはあまり多くは知られていなかった。本研究では、まず局所等長埋め込み問題を微分方程式の延長とその可積分条件の立場からとらえ直すことにより、埋め込み可能となるための条件を表現論的手法を用いて見出し、更にその条件を等質リーマン多様体に適用することを目標にする。

等長埋め込み問題は、それを表す 1 階非線形偏微分方程式系の解の存在・非存在を決定する問題として定式化される。その際に現れる種々の問題として、この方程式系の高階の延長及びその可積分条件をテンソル表示の形式で具体的に書き下すこと、また延長及びその可積分条件より導かれる障害として現れるガウス方程式が解を持つための必要条件を、余次元が高い場合に求めること等がまず考えられる。

ガウス方程式が解をもつ場合は、次の段階の問題として、ガウス方程式の解を係数にもつ微分方程式の高階延長が解を持つか否かを判定する必要がある。この高階延長が解を持つための必要条件を、リーマン多様体の曲率テンソル及びその共変微分テンソルで書き表すことが次の課題として現れる。

このような手順を繰り返し問題を展開すると、要所要所にリー代数の表現論上の問題が関わってくる。例えば plethysm と呼ばれる表現の合成積を既約分解する問題、不変式・共変式の表示問題、多重テンソル空間上の多項式環の既約分解・群作用で不変な部分多様体の分類問題等々の諸問題が本研究に本質的に関わってくる。等長埋め込みの問題を解決するためには、それと並行してこのような表現論上の諸課題にも同時に取り組まねばならない。

また、等質空間の局所等長埋め込み可能な次元を、個別論としてではなく一般論として評価することも目標の一つである。現在知られている具体的な例においては、リーマン多様体の一般論として必要な $n(n+1)/2$ 次元よりもかなり低い次元に全て埋め込み可能であることが分かっている。等質性を仮定すれば、一般的にこのような現象が成り立つのかどうかは大きな問題であるし、また等質空間の局所等長埋め込みを具体的に構成することも他方の大きな課題である。これら等質空間一般に関わる問題については、本研究期間中に成果を得るというよりは、長期的展望をもって後につながる立脚点を得るべく取り組みたいと考えている。狭い視野に籠ることなく、将来の研究に役立つ方向性を見出すことを目標としたい。

本研究で得られる成果は、微分幾何学の世界に新しい手法と結果を提供すると同時に、リー代数の表現論にも新たな知見を与えるという波及効果があるものと考えられる。本研究期間中、この視点も強く意識しながら研究をすすめた。

3. 研究の方法

本研究の大きな目標である等質空間の局所等長埋め込みの存在・非存在性について、次の4つの視点を柱として研究をすすめた。各研究分担者には各々が得意とされる分野においてご協力頂くことができた。

- (1) 局所等長埋め込みの「存在性」を示す部分
- (2) 局所等長埋め込みの「非存在性」を示す部分
- (3) 研究全体の基盤を成す部分
- (4) 研究の応用及び展開部分

(1) 存在を示すには大きく分けて二通りの方法がある。一つは埋め込みを具体的に構成することであり、もう一つは微分方程式の解の存在を抽象的に証明することである。3次元リー群の場合、その上の左不変計量については研究分担者の田丸博士氏、橋永貴弘氏等の研究により分類が既に完了しており、個別に等長埋め込みを構成すればよい。他方、等質とは限らない空間の場合には、問題は微分方程式の可解性の話に帰着されるが、この面に関しては幾何学的微分方程式の専門家から研究期間中様々な貴重なアドバイスが頂け、そのおかげもあっていくつかの解の存在を示すに至った。

(2) 埋め込みの非存在性を示すには、微分方程式の延長とその可積分条件により得られる障害を解析しつつ必要条件を新たに見出す必要がある。そこには表現論的な意味合いを強くもつ長い式が出現する。その処理には更に組合せ的な問題も生じる。これらの方面に造形が深い多くの研究者との意見交換が大いに役立った。

(3) 基盤となる部分については、随時必要に応じて研究をすすめた。特に微分方程式の高階延長及びその可積分条件を書き下す段階で必要とされる、表現論上の基本的な諸課題（例えば plethysm の分解公式）を解決するための手法として、母関数の利用が新たな視点を提供するものと思われる。この項目に関しては、本研究の枠組み内に収まるものではなく、今後の他の研究にも大いに役立つものと思われる。

(4) 研究の応用及び展開部分については、(1)(2)で述べた方法により得られた条件を、具体的な等質空間に適用することにより結果が得られる。実際にどのような結論に至るかは、計算結果を見て始めて分かったことであるが、しばしば予想外の結論に至る場面に出くわした。そのような現象の源となるものは何であるのか、それについては今後の研究を待たねばならない。よい問題が新たにより問題を生むという好循環がここに見られた。

4. 研究成果

本研究期間の間に解決することができた課題は多くある。以下それらについて簡単に説明する。その一方未解決の問題もまだ多く残されており、これらについては今後の課題として引き続き研究をすすめてゆきたい。

(1) リベルツの条件式：

本研究を開始した時点で、3次元リーマン多様体を4次元ユークリッド空間に局所等長に埋め込めるための必要条件としてリベルツの条件式が知られており、またある種の generic さの仮定の下で、これが十分条件になることも既に理論上示せていた。この条件式はそのまま書き下すと膨大な長さの式になるため、最初は計算機を使用して計算および証明を確認するしか方法がなかった。しかしその後、古典的不変式論における記号的方法がこの問題に有効であることが分かった。本研究においては、更にこの方法に工夫を重ね、研究分担者の橋永氏と協力してテンソル式の記号的方法による証明法を編み出し、計算機に頼らない証明を完成することができた。更にはリベルツの条件式そのものを記号的方法で簡潔に表示させることにも成功し、定式化から証明に至るまで、計算機に全く依存しない理論を構築することに成功した。それによりこの6個の式がもつ幾何学的な位置づけが明確になると共に、必要十分性を証明する際の式変形が代数的にみて非常に見通しのよい自然なものになった。

(2) warped product 多様体への応用1：

3次元の warped product 多様体は、底空間が1次元、ファイバーが2次元のものと、次元がその逆になるものと、2種類存在する。(1)で得られた結果の応用として、これらの空間が4次元ユークリッド空間に局所等長に埋め込めるための (generic な場合の) 必要十分条件を具体的に求めることに成功した。

底空間が1次元、ファイバーが2次元の場合、ある generic な仮定のもとで、この空間が4次元ユークリッド空間に局所等長に埋め込めるための必要十分条件は、ファイバーが正の定曲率空間であり、更に warping 関数がガウス曲率に関するある不等式を満たすことであることを示

した。更に、等長埋め込み写像を具体的に構成することにも成功した。それにより、不等式の条件がもつ幾何学的な意味合いも明確になった。

(3) warped product 多様体への応用 2 :

もう一つの、底空間が2次元でファイバーが1次元の場合、リベルツの条件を計算すると、6つある条件式のうち2つだけが真の条件として残り、残りの4つは自明な式になってしまう。この2つの条件式は warping 関数に関する3階の偏微分方程式系となるが、驚くべきことにこの2式はある関数を底空間の局所座標 x_1, x_2 で偏微分したものであることが判明し、その結果等長埋め込み可能となるための必要十分条件が warping 関数に関する2階の偏微分方程式と、ガウス曲率に関するある種の不等式の条件にまとめられることが分かった。更にここに現れる2階の偏微分方程式は、いわゆるモンジュ・アンペール型微分方程式と呼ばれているものであることが分かった。モンジュ・アンペール方程式は、過去にも等長埋め込み問題の様々な場面に現れていたものであるが、warped product 多様体の局所等長埋め込み問題にも出現するという事は思いもよらぬ発見であった。

この結果の応用として、リーマン計量が対角型であり、その対角成分が座標の1つのみに依存する3次元リーマン多様体について、それが4次元ユークリッド空間に局所等長埋め込み可能となるための必要十分条件を求めることができた。更にその局所等長埋め込みを具体的に構成することにも成功した。これは余次元1に等長埋め込み可能なリーマン計量の新しいクラスを見出したことになる。この結果自体は、本研究の早い段階で見出していたものであるが、モンジュ・アンペール方程式の特別な場合として取り扱うことにより、最終的に非常に見通しのよい形で結果をまとめることができた。また、これはまだ部分的な結果であるが、底空間の計量が具体的に与えられたときにモンジュ・アンペール方程式の解を見つけ、4次元空間に実現可能な非自明な warped product 多様体の例を構成することにも成功した。

(4) 3次元リー群への応用 :

橋永貴弘氏との共同研究「On local isometric embeddings of three-dimensional Lie groups」(Geometriae Dedicata 205 (2020))で得られた分類結果について、特にリー群が可解の場合にリベルツの条件式を用いた別証明を与えた。この方法だと、リー代数の分類結果に依存せずに多くの左不変計量が4次元ユークリッド空間に埋め込み不可能であることを立ちどころに示すことができ、リベルツの条件式の威力を見せつける結果となった。

(5) 記号的方法 :

本研究の随所に、長い式を使って表示される条件式が出現する。計算機を使えば、ある程度までの長さの式は計算可能であるが、それにも限界がある。本研究に出現する式は、実は表現論的にみても意味のある式であるために、古典的不変式論で使われていた記号的方法が有用で、それを使って式を表示すると見違えるばかりにコンパクトにまとまった表示式が得られる。もともと記号的方法とは、このように長い式を簡潔に表示するために編み出されたものであるが、本研究をすすめるうちに、それだけに終わるものではなく、諸事実の証明にも記号的方法は有効であることが明らかになった。記号的方法は、我々が想像していた以上に強力なツールであることが分かり、今後の展開が多いに期待できる。

(6) ガウス方程式の階数 :

ガウス方程式は、一般に解くことが困難な2次の代数方程式系である。まず解の存在状況を把握するためには、この方程式が定める2次写像の微分を調べる必要がある。この計算は過去一度試みたことがあるが、今回再計算することにより、例えば7次元リーマン多様体を15次元のユークリッド空間に等長に埋め込む場合、generic な仮定のもとでガウス方程式の解に本質的な一意性があることが確認できた。この状況は3次元を4次元空間に埋め込む場合と似た状況にあり、埋め込むための必要十分条件がそれと類似の形で求められる可能性がでてきた。それを把握するためには、曲率の不変式・共変式の高次版を考察する必要があり、ここにおいても記号的方法は有用であると思われる。この課題に関しては引き続き研究をすすめてゆきたい。

(7) 4次元定曲率空間への局所等長埋め込み :

リベルツの条件式はユークリッド空間への局所等長埋め込みに関する条件であるが、埋め込み先の空間をユークリッド空間から定曲率空間に置き換えても、同様の条件が得られることが判明した。これについてはまだ具体的な例を伴った成果が本研究期間中には得られなかったが、今後の有望な研究課題として、引き続き研究をすすめる予定でいる。

(8) 等質リーマン計量の局所等長埋め込みと可積分条件 :

3次元ユニモジュラーリー群上の左不変計量について、ガウス方程式の可解性と同値となる曲率の3次不変式を、リー代数の構造定数とリーマン計量(この場合は、3次対称行列)とを用いて表す公式を得た。不思議なことに、この式の分母と分子は相当に簡約化され、最終的には分子は構造定数・リーマン計量の成分に関する6次の式となった。ただ、この式も一般に膨大な長さの式になるため、これを表現論的にみてまとまりのよい形に整備し直す課題が残されている。3

次元の場合はリー代数の分類結果を用いることにより、ガウス方程式の可解性については既に最終的な結果が得られているが、この不変式を用いると、分類結果に依存しない証明が可能となる。また、高次元ユニモジュラーリー群の解法への道筋が明瞭になった点も大きい。

(9) 代数曲線の微分方程式による特徴付けと不変式：

古い研究であるが、モンジュにより平面2次曲線は5階の常微分方程式で特徴付けされることが知られていた。その式を吟味すると、意外にも古典的不変式論に現れる不変式の一つに対応していることが分かった。そこで、更に高次の平面代数曲線について同様の計算を試みた結果、5次曲線まで同様の結果が成り立つことが確認できた。しかし、まだ一般の場合の証明ができたわけではない。この問題についても、上記の記号的方法との関連が期待でき、引き続き研究をすすめる予定でいる。

本研究で得られた研究成果をまとめた論文「Intrinsic characterization of 3-dimensional Riemannian submanifolds of R^4 」を、共同研究者の橋永貴弘氏と執筆中である。本研究期間中に完成させることはできなかったが、原稿はほぼ完成状態にあり、近日中に投稿する予定でいる。この論文に盛り込めなかった成果についても、順次論文を執筆する予定である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計19件（うち査読付論文 14件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y. Agaoka, T. Hashinaga	4. 巻 205
2. 論文標題 On local isometric embeddings of three-dimensional Lie groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 191-219
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10711-019-00472-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Okuda, A. Kubo, H. Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 Dynkin indices for totally geodesic submanifolds in compact symmetric spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proc. 22nd International Workshop on Diff. Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems	6. 最初と最後の頁 195-200
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Fujii, H. Tamaru	4. 巻 -
2. 論文標題 Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres --- some recent results	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proc. 22nd International Workshop on Diff. Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems	6. 最初と最後の頁 97-104
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 K. Kiyohara, Sorin V. Sabau, K. Shibuya	4. 巻 16
2. 論文標題 The geometry of a positively curved Zoll surface of revolution	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International J. Geometric Methods in Modern Physics	6. 最初と最後の頁 1-29
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219887819410032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 阿賀岡芳夫	4. 巻 35
2. 論文標題 球面と双曲平面のタイリング (Tilings on the sphere and the hyperbolic plane)	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第35回 代数的組合せ論シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 1-14
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru	4. 巻 23
2. 論文標題 On the nonexistence of left-invariant Ricci solitons --- a conjecture and examples	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Transf. Groups	6. 最初と最後の頁 257-270
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00031-017-9439-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sadahiro Maeda, Hiroshi Tamaru, Hiromasa Tanabe	4. 巻 41
2. 論文標題 Curvature properties of homogeneous real hypersurfaces in nonflat complex space forms	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kodai Math. J.	6. 最初と最後の頁 315-331
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2996/kmj/1530496844	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Tamaru	4. 巻 35
2. 論文標題 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part III	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第35回代数的組合せ論シンポジウム記録集	6. 最初と最後の頁 67-73
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 奥田隆幸	4. 巻 65
2. 論文標題 複素旗多様体内の実形の交叉の対蹠性とFloerホモロジー	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 第65回幾何学シンポジウム予稿集	6. 最初と最後の頁 75-79
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jong Taek Cho, Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru	4. 巻 123
2. 論文標題 Realizations of some contact metric manifolds as Ricci soliton real hypersurfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Geom. Phys.	6. 最初と最後の頁 221-234
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2017.08.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jong Taek Cho, Takahiro Hashinaga, Akira Kubo, Yuichiro Taketomi, Hiroshi Tamaru	4. 巻 203
2. 論文標題 The solvable models of noncompact real two-plane Grassmannians and some applications	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Hermitian-Grassmannian Submanifolds	6. 最初と最後の頁 311-321
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-10-5556-0_26	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takayuki Okuda	4. 巻 -
2. 論文標題 Geodesics of Riemannian symmetric spaces included in reflective submanifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Contemporary Perspectives in Differential Geometry and its Related Fields	6. 最初と最後の頁 21-32
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahiro Hashinaga, Toru Kajigaya	4. 巻 51
2. 論文標題 A class of non-compact homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Ann. Global Anal. Geom.	6. 最初と最後の頁 21-33
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10455-016-9521-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A.Kubo, K.Onda, Y.Taketomi, H.Tamaru	4. 巻 46
2. 論文標題 On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Hiroshima Math. J.	6. 最初と最後の頁 357-374
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T.Hashinaga, H.Tamaru	4. 巻 28
2. 論文標題 Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Internat. J. Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X17500483	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M.Bochenski, P.Jastrzebski, T.Okuda, A.Tralle	4. 巻 27
2. 論文標題 Proper $SL(2;R)$ -actions on homogeneous spaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Internat. J. Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X16501068	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T.Okuda	4. 巻 24
2. 論文標題 Abundance of nilpotent orbits in real semisimple Lie algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Math. Sci. Univ. Tokyo	6. 最初と最後の頁 399-430
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T.Hashinaga, A.Kubo, H.Tamaru	4. 巻 68
2. 論文標題 Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J.	6. 最初と最後の頁 559-568
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj/1486177215	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 H.Kurihara, T.Okuda	4. 巻 559
2. 論文標題 Great antipodal sets on complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 432-466
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.05.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計68件 (うち招待講演 63件 / うち国際学会 26件)

1. 発表者名 阿賀岡芳夫, 橋永貴弘
2. 発表標題 3次元 warped product 計量の局所等長埋め込み
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿賀岡芳夫
2. 発表標題 タイリング入門 --- 平面・球面・双曲平面 ---
3. 学会等名 組合せ論サマースクール 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿賀岡芳夫
2. 発表標題 余次元 1 のリーマン部分多様体の内在的特徴付け
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿賀岡芳夫
2. 発表標題 ユークリッド空間の超曲面の特徴付け
3. 学会等名 合宿セミナー 2019 in 倉敷 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H.Tamaru
2. 発表標題 Moment maps and isoparametric hypersurfaces in spheres
3. 学会等名 Workshop on the Isoparametric Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 田丸博士
2. 発表標題 Geometry of homogeneous hypersurfaces in noncompact symmetric spaces
3. 学会等名 第2回水戸幾何小研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H.Tamaru
2. 発表標題 On the moduli spaces of left-invariant geometric structures
3. 学会等名 Workshop on geometric analysis and homogeneous geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H.Tamaru
2. 発表標題 Geometry of homogeneous hypersurfaces in noncompact symmetric spaces
3. 学会等名 Symmetry and shape (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H.Tamaru
2. 発表標題 Left-invariant metrics and submanifold geometry of noncompact symmetric spaces
3. 学会等名 AMS Special Session on Differential Geometry and Global Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田丸博士
2. 発表標題 Quandles and discrete symmetric spaces
3. 学会等名 第15回代数・解析・幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 澁谷一博
2. 発表標題 接触変換によるモンジュアンペール方程式のクラスの不変性
3. 学会等名 北大幾何学コロキウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T.Okuda
2. 発表標題 Delsarte's theory on coherent configurations
3. 学会等名 Sendai Workshop on Combinatorics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T.Okuda
2. 発表標題 Totally geodesic immersions of direct products of 2-spheres in compact symmetric spaces
3. 学会等名 The 18th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Differential Geometry of Submanifolds in Symmetric Spaces and Related Problems（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 T.Okuda
2. 発表標題 Combinatorics and Fourier analysis on compact symmetric spaces
3. 学会等名 カンドルと対称空間 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 橋永貴弘
2. 発表標題 根付き木を用いたラグランジュ部分代数の構成
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T.Hashinaga
2. 発表標題 Realizations of contact metric (\cdot, μ) -spaces as homogeneous real hypersurfaces in noncompact real two-plane Grassmannians
3. 学会等名 Symmetry and Shape (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 阿賀岡芳夫
2. 発表標題 GL(V) の組合せ的表現論速習 --- Schur 関数・テンソル積・不変式・plethysm ---
3. 学会等名 北九州 workshop 2018 「不変式論と微分幾何学への応用」 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 阿賀岡芳夫
2. 発表標題 球面と双曲平面のタイリング
3. 学会等名 第35回 代数的組合せ論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 阿賀岡芳夫
2. 発表標題 古典的不変式論と曲線の微分方程式
3. 学会等名 第26回沼津改め静岡研究会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Examples of weakly reflective submanifolds in noncompact symmetric spaces
3. 学会等名 Hiroshima Differential Geometry Day 2018 (Hiroshima University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Discrete symmetric spaces, quandles, and their subsets
3. 学会等名 広島大学数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Symmetric spaces, submanifold geometry, and left-invariant metrics
3. 学会等名 大阪市立大学 OCAMI 談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 カンドルおよび対称空間内のある種の部分集合
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 澁谷一博
2. 発表標題 接触変換で不変な微分方程式のクラスについて
3. 学会等名 合宿セミナー 2018 in 福山 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 Noncompact homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 Hiroshima Differential Geometry Day 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 記号的方法と局所等長埋め込み問題への応用
3. 学会等名 北九州ワークショップ2018「不変式論と微分幾何学への応用」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 Homogeneous Lagrangian submanifolds in Hermitian symmetric spaces of noncompact type
3. 学会等名 ICDG 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 非コンパクト型エルミート対称空間内の等質部分多様体
3. 学会等名 測地線及び関連する諸問題 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 岩澤分解の冪零部分とその部分リー代数
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takahiro Hashinaga
2. 発表標題 根付き木を用いたラグランジュ部分代数の構成
3. 学会等名 北九州ワークショップ「幾何学と組合せ論2019」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Fourier analysis and Combinatorics on compact homogeneous spaces
3. 学会等名 The Legacy of Joseph Fourier after 250 years (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Double integration and designs
3. 学会等名 2018 Mini-workshop on Designs Theory and Quantum Informations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Delsarte's theory for subsets of finite homogeneous spaces
3. 学会等名 研究集会「カンドルと対称空間」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 Integrality of Dynkin indices for totally geodesic submanifolds of compact symmetric spaces
3. 学会等名 広島幾何学研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 複素旗多様体内の実形の交叉と Floer ホモロジー
3. 学会等名 第65回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 阿賀岡 芳夫
2. 発表標題 Principal lines of triangle centers
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会 2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 阿賀岡 芳夫
2. 発表標題 対称空間の局所等長埋め込みと曲率不変量
3. 学会等名 合宿セミナー 2017 in 大久野島 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some Lie groups
3. 学会等名 Geometry of Submanifolds and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Flat quandles and finite subsets in symmetric spaces
3. 学会等名 Hakata Workshop Winter Meeting 2018: Discrete Mathematics and its Applications (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some solvable Lie groups
3. 学会等名 AMS Special Session on Nilpotent and Solvable Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Symmetric spaces, submanifold geometry, and solvmanifolds
3. 学会等名 Capital Normal University-Hiroshima University Joint Conference on Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Tamaru
2. 発表標題 Left-invariant metrics and submanifold geometry
3. 学会等名 Lie Group Actions in Riemannian Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Delsarte theory for finite regular hypergraphs
3. 学会等名 The 13th USTC-AHU Joint Seminar on Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Strongly orthogonal subsets and opposition involutions of root systems
3. 学会等名 Internatinal Workshop on Bannai--Ito Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Coding theory on compact symmetric spaces
3. 学会等名 Capital Normal University--Hiroshima University joint conference on Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takayuki Okuda
2. 発表標題 Distance-transitive graphs coming from great antipodal sets on symmetric R-spaces
3. 学会等名 The 82-th KPPY Combinatorics Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥田隆幸
2. 発表標題 対称空間上の符号理論における対蹠集合
3. 学会等名 研究集会「対称空間論とその周辺」～田崎博之先生の遺曆を記念して～(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Jong Taek Cho, 橋永 貴弘, 久保 亮, 武富 雄一郎, 田丸 博士
2. 発表標題 Realizations of some contact metric manifolds as Ricci soliton real hypersurfaces
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 橋永 貴弘
2. 発表標題 3次元リーマン多様体の局所等長埋め込み
3. 学会等名 淡路島幾何学研究集会2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 橋永 貴弘
2. 発表標題 3次元リーマン多様体の局所等長埋め込み
3. 学会等名 信州大学数理科学談話会, 数理経済談話会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 阿賀岡 芳夫
2. 発表標題 R^4 の超曲面として局所的に実現可能なリーマン多様体の内在的特徴付け --- 曲率の1階微分方程式として
3. 学会等名 北九州幾何学研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 阿賀岡 芳夫
2. 発表標題 リー環の成す variety と幾何構造
3. 学会等名 合宿セミナー 2016 in 山口 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 阿賀岡 芳夫
2. 発表標題 双曲平面のひし形タイリング
3. 学会等名 研究会 直観幾何学 2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 阿賀岡 芳夫
2. 発表標題 リー環の定義方程式・不変量と幾何構造 --- 低次元の場合
3. 学会等名 第24回沼津研究会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 阿賀岡 芳夫、橋永 貴弘
2. 発表標題 3次元リーマン多様体が4次元ユークリッド空間へ局所等長埋め込み可能となるための必要十分条件
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 H.Tamaru
2. 発表標題 Left-invariant metrics and submanifold geometry
3. 学会等名 The 7th International Workshop on Differential Geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥田 隆幸
2. 発表標題 リーマン対称空間内の測地線を共有しない全測地的部分多様体の組について
3. 学会等名 日本数学会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥田 隆幸
2. 発表標題 リーマン対称空間中の全測地的部分多様体と擬リーマン簡約型等質空間の対応について
3. 学会等名 名城幾何学研究集会「多様体上の計量と幾何構造」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 奥田 隆幸
2. 発表標題 複素グラスマン多様体における大対蹠集合を用いた積分近似公式について
3. 学会等名 RIMS研究集会「リー型の組合せ論」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 T.Hashinaga
2. 発表標題 On homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 The 13th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Geometry and Lie Theory (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T.Hashinaga
2. 発表標題 On homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces
3. 学会等名 Differential Geometry, Lie Theory and Low-Dimensional Topology (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 K.Shibuya
2. 発表標題 A classification problem for 3rd order PDEs via differential systems
3. 学会等名 The second China-Japan geometry conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 K.Shibuya
2. 発表標題 A classification problem for 3rd order PDEs via differential systems
3. 学会等名 The 51-th Symposium on Finsler Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 K.Shibuya
2. 発表標題 A classification problem for 3rd order PDEs via differential systems
3. 学会等名 Geometry Seminar in Northeast Normal University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 澁谷 一博
2. 発表標題 微分方程式の幾何学と分類問題 I, II
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 阿賀岡芳夫
2. 発表標題 リーマン多様体の局所等長埋め込みとMonge-Ampere方程式
3. 学会等名 広島幾何学研究集会2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 田丸博士
2. 発表標題 可解岩澤群内の余次元1リッチソリトン
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2020 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 橋永貴弘
2. 発表標題 3次元リーマン多様体の余次元1局所等長埋め込み
3. 学会等名 筑波大学微分幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 K.Shintaku, H.Dekihara, T.Ochi, R.Miyazaki, T.Ozaki, R.Wada, Y.Agaoka, J.Maeda, S.Sakai, T.Takahama, H.Hasegawa	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Kyushu Univ. Press	5. 総ページ数 98 (29-39)
3. 書名 Current Researches for Applied Economics, Information Systems, Mathematics and OR	

1. 著者名 C.Czerkawski, O.Kurihara, H.Dekihara, T.Iwaki, N.Zhang, R.Wada, Y.Agaoka, S.Sakai, T.Takahama, Y.Liu, T.Sato	4. 発行年 2018年
2. 出版社 Kyushu Univ. Press	5. 総ページ数 112 (47-63)
3. 書名 Recent Studies in Economic Sciences: Information Systems, Project Managements, Economics, OR and Mathematics	

1. 著者名 M.Kitahara, C.Czerkawski, O.Kurihara, H.Hasegawa, S.Sakai, T.Takahama, R.Wada, Y.Agaoka, A.Kubo	4. 発行年 2017年
2. 出版社 Kyushu Univ. Press	5. 総ページ数 141 (93-124)
3. 書名 Challenging Reseraches in Economic Sciences --- Legal Informatics, Environmental Economics, Economics, OR and Mathematics	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>組合せ論サマースクール 2019 https://sites.google.com/view/cos2019</p> <p>部分多様体論・湯沢2019 http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/yuzawa/yuzawa2019.html</p> <p>第35回 代数的組合せ論シンポジウム報告集 https://hnozaki.jimdo.com/proceedings-symp-alg-comb/no-35/</p> <p>第26回沼津改め静岡研究会 http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/Numazu-Shizuoka/26thShizuokaMeeting.html</p> <p>リー環の成す variety と幾何構造 http://home.hiroshima-u.ac.jp/okudatak/campseminar/16yamaguchi.html</p> <p>リー環の定義方程式・不変量と幾何構造 --- 低次元の場合 http://www.mmm.muroran-it.ac.jp/~masatomo/24thNumazuMeeting.html</p> <p>アウトリーチ活動 タイリング、数学セミナー (2016) 5月号 pp.24-29 平面と球面のタイリング、SSH 事業学校設定科目「総合科学」特別講義 (フロンティアサイエンス講義)講師、広島大学附属高等学校 2018年9月14日 3角形の幾何学、広島大学総合科学部公開講座 数理の世界 2019年7月27日 タイリングを研究しよう、SSH 事業学校設定科目「総合科学」特別講義 (フロンティアサイエンス講義)講師 広島大学附属高等学校 2019年9月13日</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	田丸 博士 (TAMARU Hiroshi) (50306982)	大阪市立大学・大学院理学研究科・教授 (24402)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	澁谷 一博 (SHIBUYA Kazuhiro) (00569832)	広島大学・先進理工系科学研究科(理)・准教授 (15401)	
研究分担者	奥田 隆幸 (OKUDA Takayuki) (40725131)	広島大学・先進理工系科学研究科(理)・講師 (15401)	
研究分担者	橋永 貴弘 (HASHINAGA Takahiro) (40772132)	北九州工業高等専門学校・生産デザイン工学科・講師 (57103)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ノルウェー	Norwegian Univ. of Sci. and Tech.			