

令和 3 年 6 月 18 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05135

研究課題名（和文）Rizza構造を許容する正則ベクトル束の微分幾何学とその応用に関する研究

研究課題名（英文）Differential geometry of holomorphic vector bundles with Rizza structures and its applications

研究代表者

愛甲 正（Aikou, Tadashi）

鹿児島大学・理工学域理学系・教授

研究者番号：00192831

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：この研究では、コンパクトな複素多様体上の正則ベクトル束のnegativityについて、Finsler幾何学の立場から研究した。正則ベクトル束にRizza構造が与えられると、Rizza-negativityが自然に定義される。一方で、よく知られた正則ベクトル束のnegativityには、Hermite幾何学の意味でのGriffith-negativityと代数幾何学の意味でのnegativityがあり、この研究ではこれらのnegativityの関係について研究した。特に、与えられたRizza構造が複素Berwald構造であるという特殊な仮定のもとで研究を遂行した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この研究課題では、Hermite構造を一般化した複素Finsler構造の類の計量構造であるRizza構造を微分幾何学の手法を用いて研究し、代数幾何学的な概念であるコンパクト複素多様体上の正則ベクトル束のnegativity（負性）または、その双対的な概念であるampleness（豊富性）を議論したものである。特にRizza-negativityの概念を導入し、代数幾何学の意味でのnegativityとHermite幾何学の意味でのnegativityとの関係を構築できた。得られた結果は新たな研究課題を生み出し、今後の研究の方向性を示唆する結果となった。

研究成果の概要（英文）：In this study, we mainly studied the negativity of holomorphic vector bundles over compact complex manifolds from the point of view of Finsler geometry. Given a Rizza structure in a holomorphic vector bundle, the notion of Rizza-negativity is naturally defined in terms of its curvature. On the other hand, there are two different types of negativity on holomorphic vector bundles, that is, the Griffith-negativity in the sense of Hermite geometry and the negativity in the sense of algebraic geometry. In this study, we have studied the relationship between these three negativities on holomorphic vector bundles. In particular, we have studied whether the Griffith-negativity leads the Rizza-negativity under the assumption that the given Rizza structure is a complex Berwald structure.

研究分野：幾何学

キーワード：Rizza構造 複素Finsler構造 Rizza-negativity Griffith-negativity

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

前回の科学研究費助成事業(平成24年度~26年度)での「平均化の手法による Finsler 幾何学の大域的研究」では、V.S. Matveev 氏等の研究(Ann. Inst. Fourier, Grenoble **59**, 937- 949 (2009))が提案した、Finsler 計量をファイバー積分して得られる Riemann 計量を解析するという平均化の手法を複素 Finsler 計量及び実 Finsler 計量に応用し、さらに解析を進めて、コンパクト複素多様体上の正則ベクトル束と実多様体の接束の共形幾何学を研究した。平均化の手法を用いた研究では、それまでの主な研究手法であったテンソル解析の手法を見直し、Finsler 幾何学にそれまでにはなかった新たな観点から研究手法を導入することができた。特に、Haripamyu 氏との共同研究では複素多様体上の正則ベクトル束に Rizza 構造の概念を導入し、さらにこの Rizza 構造を用いて Hermite 幾何学でよく知られた Griffith-negativity を拡張して Rizza-negativity という新しい概念を導入して、それまで知られていた研究との関連を検証した。その成果は Haripamyu 氏の博士論文

「Applications of Averaging Methods to Complex Finsler Geometry (鹿児島大学, 2016年3月)」

に詳細に報告し、さらに主要な結果は国際誌(Publ. Math. Debrecen **87**, 449-462(2015))に発表した。また、実 Finsler 幾何学の共形理論の研究については、Jenizon 氏との共同研究により Weyl 構造の幾何学を Finsler 幾何学に拡張した。この共同研究により得られた Finsler 幾何学の共形理論は Jenizon 氏の博士論文

「Some Topics in Conformal Finsler Geometry (鹿児島大学, 2015年10月)」

に詳細に報告した。また主要な結果は学会誌(TENSOR, N.S. **75**(3), 211-218(2014))に発表した。本研究では、上記に述べた研究で得られた複素 Finsler 幾何学及び実 Finsler 幾何学における成果を再度検証し、新たな課題について研究を遂行した。

2. 研究の目的

実多様体上のベクトル束の Finsler 計量は、全空間で定義された連続なノルム関数であって、零切断以外で滑らかであり、ファイバーに沿って強凸であるときをいう。この条件はその関数の平方のファイバー座標に関する Hesse 行列が正定値なものをいう。したがって各ファイバーはその Hesse 行列が Riemann 計量となる Hesse 多様体の構造をもつ。また、複素多様体上の正則ベクトル束の Finsler 計量は、実の場合と同様に、ノルム関数の平方から得られる複素 Hesse 行列が正定値となると Rizza 構造と呼ばれる自然な計量を定義する。この計量構造によって各ファイバーは Kahler 多様体となることわかる。したがって本研究課題における研究対象は、ファイバーが Hesse 多様体である実多様体の接束と、ファイバーが Kahler 多様体の構造を持つコンパクト複素多様体上の正則ベクトル束に他ならない。前回の科学研究費助成事業で展開した平均化の手法により得られた成果を再度検証し応用することにより、本研究課題では以下の項目について研究を進めた。

(1) Rizza 構造を許容する正則ベクトル束の negativity に関する研究

(2) Finsler 幾何学における共形幾何学に関する研究

3. 研究の方法

研究の目的の項でも述べたように、Finsler 計量はベクトル束の各ファイバーに Hesse 計量または Kahler 計量を定義する。これらの計量構造は束の垂直部分束に内積構造を誘導し、Finsler 幾何学はこの垂直部分束の微分幾何学を研究することに他ならないことわかる。Finsler 幾何学で重要な道具は Finsler 計量から一意的に定まる Ehresmann 接続、すなわち、古典的には非線形接続と呼ばれる全空間の接束の直和分解の設定である。この非線形接続が定める平行移動は Finsler 接続とよばれる共変微分を定義し、これが Finsler 幾何学の基本的な道具となる。本研究を遂行するにあたっては、微分幾何学的な研究内容については研究代表者が担当し、主にベクトル束の微分幾何学の手法で研究を遂行した。

コンパクト複素多様体上の正則ベクトル束の複素 Finsler 幾何学を研究する場合、Rizza 構造の曲率の符号を解析する場合、Rizza 構造をファイバー積分して得られる Hermite 計量の曲率の符号の解析が重要である。このことは平均化の手法を複素の場合に拡張することにより明らかにされたが、この Hermite 計量の構成法は Weil-Petersson 計量の構成法と同様である。したがって、Weil-Petersson 計量に詳しい小櫃分担者の協力を得て研究を進めた。

実 Finsler 幾何学では、Weyl の共形曲率テンソルのような共形的平坦性を特徴付ける曲率テンソルが見つからないために Finsler 幾何学での共形幾何学の研究が十分とは言えない。共形幾何学については、Riemann 幾何学の共形理論でよく用いられる Weyl 接続を Finsler 幾何学に拡張した Finsler-Weyl 接続と古典的によく知られている Wagner 接続との関係を詳細に考察した。この共形理論の研究については、理論物理学の分野でも重要な役割を持つ Weyl 構造の幾何学が必要と考えられたことから、理論物理学の専門家である田中分担者の協力を得て研究を遂行した。

4. 研究成果

(1) Rizza 構造を許容する正則ベクトル束の negativity に関する研究

複素 Finsler 幾何学の研究は G. Schumacher 氏による Petersson-Weil 計量の研究に共通する部分も多い。実際, Rizza 構造から定まる非線形接続は G. Schumacher の研究に用いられているベクトル場の水平リフトに一致することがわかり, この非線形接続から定まる複素接続はその平行移動が Rizza 構造を保つことを証明できる。この接続を利用して Haripamyu 氏との共同研究で得られた Rizza-negativity の概念を再検証した。この negativity は正則ベクトル束が代数幾何学の意味での negativity よりも強い仮定であって, よく知られた Griffiths-negativity との関係は

「Rizza-negative Griffiths-negative negative」

の関係を証明できている。本研究ではこの逆向きの主張が成立するかを研究した。「negative Griffiths-negative」は「Griffith 予想」と呼ばれる難解な未解決問題であり, 現在でも多くの研究者が取り組んでいる。この研究では「Griffiths-negative Rizza-negative」について研究した。この問題については, 底空間である複素多様体が複素射影直線である場合は古典的な結果を応用することにより, また一般のコンパクト複素多様体の場合は与えられた Rizza 構造が特殊な仮定を満たすときは正しいことを証明できた。この結果は

「Some remarks on complex Berwald structures, 55th Symposium on Finsler Geometry 2020 (2021 年 1 月 9 日-10 日, Zoom による国際会議)

として発表し, 論文として投稿準備中である。

(2) Finsler 幾何学における共形幾何学に関する研究

研究代表者は Finsler 計量の共形的平坦性を特徴付ける曲率テンソルを構成できるかという未解決問題の研究のため, Riemann 幾何学で重要な Weyl 接続を拡張した Finsler-Weyl 接続の概念を導入した。その曲率の消滅で Finsler 計量の共形的平坦性を特徴付けることは Jenizon 氏との共同研究でわかっていた。また, Finsler 計量が共形的に平坦なとき, この計量を平均化して得られる Riemann 計量も共形的に平坦なことを証明した。Jenizon 氏との共同研究での結果は Weyl 形式という任意の一次微分形式を含むために, 当初の目標からすれば, 完全に解決したとは言えなかった。

一方で計量の共形的変更は接続の片側射影変換と深く関係していることが, 橋口正夫氏と一條義博氏との 1970 年代の共同研究により既に指摘されていた。本研究では橋口-一条氏の研究を見直すことから始め, この片側射影変換により不変な曲率を構成し, その消滅が共形的平坦性を特徴付けることを示した。得られた成果はルーマニアで開催された国際会議で

「Some remarks on conformal Finsler metrics and Wagner-type connection, DGDS(2017), 2017 年 10 月, ブカレスト」

として講演し, また信州大学で開催された国際会議で

「Some remarks on conformal structures in Finsler geometry, 15th International Conference of Tensor Society, 2017 年 8 月, 信州大学」

として報告した。さらに, この研究発表後, 片側射影変換の幾何学は接束と density 直線束とよばれる直線束とのテンソル積の幾何学と同値であることがわかり, またこのテンソル積の Finsler 計量は元の Finsler 計量の共形的変形で得られることを証明できた。この直線束と接束のテンソル積に自然に定義される共形的 Finsler 計量とそれが定める Finsler 接続の曲率を解析した結果, その曲率の消滅が初めに与えられた Finsler 計量の共形的平坦性を特徴付けることを証明した。この結果については

「One-sided projective changes of Finsler connections, 第 53 回フィンスラー幾何学シンポジウム, 2018 年, 福岡市」

として発表し, 出席者との意見交換を行い有益な意見を得ることができた。この結果を詳細に検証し投稿準備中である。

実 Finsler 幾何学あるいは複素 Finsler 幾何学のいずれの研究においても, 計量をファイバー積分して得られる新しい Riemann 計量 (Kahler 計量) が, 接続をファイバー積分して得られる新しい接続と適合するという, 前回の科学研究費助成事業で得られた基本的成果が, 今回の研究にも重要な役割を果たしている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ootsuka Takayoshi, Ishida Muneyuki, Tanaka Erico, Yahagi Ryoko	4. 巻 -
2. 論文標題 Super Finsler connection of superparticle on two-dimensional curved spacetime	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Geometric Methods in Modern Physics	6. 最初と最後の頁 1950055 ~ 1950055
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219887819500555	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 5件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Tadashi Aikou
2. 発表標題 Negative vector bundles and complex Finsler geometry
3. 学会等名 23rd International Summer School on Global Analysis and Applications（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tadashi Aikou
2. 発表標題 One-sided projective changes of Finsler connections
3. 学会等名 第53回フィンスラー幾何学シンポジウム（福岡工業大学）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小櫃 邦夫
2. 発表標題 擬等角変分の方法について
3. 学会等名 Beltrami方程式勉強会 II（東京工業大学）（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tadashi Aikou
2. 発表標題 Some Remarks on Conformal Finsler metrics and Wagner-type connections
3. 学会等名 DGDS-2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tadashi Aikou
2. 発表標題 Some remarks on conformal structures in Finsler geometry
3. 学会等名 15th International Conference of Tensor Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tadashi Aikou
2. 発表標題 Conformal Finsler structures and connections
3. 学会等名 第5回フインスラー幾何学研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小櫃 邦夫
2. 発表標題 Symplectic structures on the space of quadratic differentials
3. 学会等名 モジュライ空間のシンプレクティック幾何 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Erico Tanaka
2. 発表標題 Geodesic Equations of Superparticle using Super Finsler Connection
3. 学会等名 Strings and Fields 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tadashi Aikou
2. 発表標題 Some remake on locally conformal Berwald spaces
3. 学会等名 第51回フィンスラー幾何学研究集会
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	小櫃 邦夫 (Obitsu Kunio) (00325763)	鹿児島大学・理工学域理学系・准教授 (17701)	
研究 分担者	田中 恵理子 (Tanaka Erico) (70376979)	鹿児島大学・理工学域理学系・助教 (17701)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------