

令和 2 年 6 月 17 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05137

研究課題名(和文)分岐問題に関わるシンプレクティック商の研究

研究課題名(英文)Study on symplectic quotients concerned with branching problems

研究代表者

高倉 樹 (Takakura, Tatsuru)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：30268974

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：コンパクト・リー群の余随伴軌道(旗多様体)に付随して定まる重複度多様体や多重ウェイト多様体について研究を行い、以下の結果を得た。

第一に、A型の特殊ベクトル体積関数の微分方程式による特徴付けについて論文にまとめた(arXiv:1904.05000)。第二に、非退化なA型多重ウェイト多様体のシンプレクティック体積関数が実数体上のコホモロジー環を決定することを厳密に証明し、A2型の二重ウェイト多様体に応用した。第三に、非退化なA型特殊ウェイト多様体が一般ポット塔の構造をもつことを示した。

また、これらの研究成果の内容を、いくつかの国内外の研究集会で発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

意味のあるよいクラスの空間の組織的構成、それらの各種不変量の決定と同型類や大域的構造の深い理解、またその過程における表現論や組合せ論への寄与、等が、学術的意義として挙げられる。また、個々の具体例における詳細な計算過程や計算結果自体にも味わいがある点は、本研究の特色・独創性の一つと考えられる。

さらに、国内外の他の研究との関連が判明し、派生する問題もいくつか得られたことは、今後の研究の広がり示唆している。

研究成果の概要(英文)：We studied the multiplicity varieties and multiple weight varieties associated with coadjoint orbits (flag manifolds) of a compact Lie group, and obtained the results as follows.

First, we characterized the special vector volume function of type A, by means of a system of differential equations (arXiv: 1904.05000). Second, we proved that the symplectic volume function of a nondegenerate multiple weight variety of type A determines the cohomology ring over real numbers, and applied it to the study of double weight varieties of type A2. Third, we showed that a nondegenerate special weight variety of type A has the structure of a generalized Bott tower.

We gave presentations about the results as above in some international and domestic conferences.

研究分野：位相幾何学

キーワード：シンプレクティック商 余随伴軌道 旗多様体 ウェイト多様体 分岐問題 凸多面体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

リー群の作用をもつシンプレクティック多様体に対し、群作用による単なる商ではなく、ある一部分(それは運動量写像を用いて記述される)の商を考えると、再びシンプレクティック多様体になる。これをシンプレクティック商と呼ぶ。各種のモジュライ空間がこのような構成で得られることからその重要性が多方面で認識されており、また、シンプレクティック多様体の族を構成的に与える方法としても有効とされている。

さて、ある種の同変指数を考えることにより、リー群の作用をもつシンプレクティック多様体と、リー群の表現との対応が得られる。群の表現においては、各種の操作(直和・テンソル積等)が標準的に定まるが、多様体におけるこれらの対応物がやはり自然な形で存在する。例えば、表現のテンソル積には多様体の直積が対応する。そして、表現の既約分解(特に、各既約成分の重複度)や、部分群の表現としての分岐則の対応物を与えるのが、シンプレクティック商であることが知られている。

このように、群作用をもつシンプレクティック多様体とその商の構造は、群の表現論の幾何学的な側面を表しており、種々の立場から活発に研究されている。そこでは、空間の幾何とトポロジー、表現論、凸体の組合せ論がより一層興味深い形で関わりあうことが期待される。

2. 研究の目的

本研究の目的は、以下の2つである。

- A. 表現の分岐問題の幾何学的対応物である、余随伴軌道(旗多様体)に付随するシンプレクティック商とその部分多様体について、その大域的構造を明らかにすること。
- B. Aの過程に現れる各種の不変量の代数的・表現論的・組合せ的構造を詳しく調べること。

目的Aは、リー群の余随伴軌道たちから得られるシンプレクティック商が、表現の分岐問題の幾何学的対応物であることに着目して、ラグランジュ部分多様体も含めて、その同型類や大域的構造を調べることを意図している。その過程で、各種の不変量(指数・特性数・シンプレクティック体積・(交叉)コホモロジー環・座標環など)が自然に問題となるが、目的Bは、その計算の背後にある諸構造を代数的・表現論的・組合せ的立場から詳しく調べることを意図とする。

これらは、本研究代表者が継続してきた研究を踏襲する自然な問題意識であり、新たな手法を用いてさらに深い成果を挙げることを意図している。またそれらは、幾何学・位相幾何学と他の諸分野が交錯する豊かな内容を含んでおり、普遍的な数学的対象の好例になると期待される。

3. 研究の方法

研究計画調書・交付申請書の研究目的欄に挙げた具体的な問題・目標にしたがって研究を進める。具体的な研究方法としては、研究組織内での議論・情報交換に加えて、

各地の研究者を訪問・招聘し、議論・情報交換を行うこと

国内外の関連する研究集会に積極的に参加し、議論・情報交換と資料収集を行うこと

情報・文献の収集を幅広く行うこと

数値計算・数式処理を効果的に行うこと

を想定している。申請した研究経費はすべて、これらの事項の遂行のために用いる。

4. 研究成果

研究期間全体を通じて、コンパクト・リー群の余随伴軌道(旗多様体)に付随して定まる重複度多様体や多重ウェイト多様体について、コホモロジー環の構造や位相型の特定についての研究を行った。

また同時に、上記の空間の代数的・組合せ的対応物である、リー群・リー環の既約表現の族からテンソル積・部分空間などの操作により得られる次数付きベクトル空間の構造についての研究を行った。これは、各種の表現に対する分岐問題と深く関連する。具体的には、ベクトル分割関数や、その連続版であるベクトル体積関数が重要な対象となる。

これらに関して、本研究期間中に得られた結果は以下の通りである。

(1) 「良い chamber」に対する A 型のベクトル体積関数(特殊ベクトル体積関数)がある微分方程式系によって特徴づけられることを証明し、また、特殊ベクトル関数を階数について帰納的に与える公式を得た(arXiv:1904.05000)。この事実は、(2)で述べるような、特殊多重ウェイト多様体が一般ポット塔の構造をもつことと深く関わるものであり、単なる組合せ論的な公式を超える意義をもつ。

(2) A 型の特殊多重ウェイト多様体の位相型の考察、特に射影空間束の塔(一般ポット塔)としての構造について、主張の定式化と証明の細部の見直しを行った。これは、Guillemin-Lerman-Sternberg による著書内のある主張の修正を含むものであり、また結果の自然さ・美し

さの点でも極めて重要である。

(3) A 型の多重ウェイト多様体のシンプレクティック体積関数が実数体上のコホモロジー環を決定することの厳密な証明を与え、それを A2 型の二重ウェイト多様体の位相構造へ応用した。それをまとめた論文を現在校正中であるこの結果は、シンプレクティック体積を調べることの重要性を示すものであり、注目に値する。

(4) さらに、非退化な A 型ウェイト多様体の体積関数を、特殊ベクトル体積関数を用いて表す公式について検討した。非退化な A 型ウェイト多様体のコホモロジー環に関する既知の (R. Goldin による) 結果を詳細に検討したところ、そこでは特殊とは限らない一般の場合も扱われているので、体積公式についても同様のことができるか、ということが自然に問題となったからである。現在、B.V. Lidskii の公式の証明の再検討を進めている。

(5) さらに、特殊重複度多様体と特殊ウェイト多様体の間の同型対応の存在問題に取り組んだ。この問題は、非アーベル商とアーベル商の間の非自明な対応関係を与えるものとして非常に興味深い。現在のところ糸口が見つからない。しかしその過程で、旗多様体のグロモフ幅等についての他の研究との関連も判明し、また派生する問題もいくつか得られた。引き続き、今後の課題としたい。

また、これらの研究成果の内容を、いくつかの国内外の研究集会で発表した。なお、2018 年度に本務等の事情でいくつかの国内出張を取り止めたため、研究の遂行に遅れが生じた。そのため、補助事業期間を 1 年間延長した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Tatsuru Takakura
2. 発表標題 On multiplicity varieties and weight varieties
3. 学会等名 The 4th China-Japan Geometry Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shigeaki Miyoshi
2. 発表標題 Construction of smooth typical foliations of 3-manifolds
3. 学会等名 Foliations and Diffeomorphism Groups 2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高倉 樹
2. 発表標題 On volume functions of special flow polytopes
3. 学会等名 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高倉 樹
2. 発表標題 Multiplicities in equivariant indices and symplectic quotients 1,2
3. 学会等名 Koriyama Geometry and Physics Days 2017, "Geometric Quantization and related topics" (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高倉 樹
2. 発表標題 On multiplicity varieties
3. 学会等名 シンプレクティック幾何学とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	三好 重明 (Miyoshi Shigeaki) (60166212)	中央大学・理工学部・教授 (32641)	