

令和元年5月20日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05140

研究課題名(和文)ファイバー束構造による実特異点の位相的研究と多様体の具体的構成への応用

研究課題名(英文)Topological study of real singularities and manifolds using fibring structures

研究代表者

石川 昌治 (ISHIKAWA, Masaharu)

慶應義塾大学・経済学部(日吉)・教授

研究者番号：10361784

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：多項式写像や安定写像を与えるファイバー束の特異点を利用して、多様体や特異点の情報を読み取り、さらに大域的な情報を記述する研究を行った。多項式写像の無限遠の特異点の研究においては、2変数実多項式写像に対し、特異ファイバーの有無をトーリック型のコンパクト化を使うことで具体的に判定できることを示した。また、複素平面曲線特異点のミルナーファイバーについて、実モース化およびA'Campoによるディバイドを経由することで、4次元球体への埋め込みをシャドウという多面体により記述することに成功した。さらに、境界に現れる3次元多様体の研究として、フロースパインと接触構造に関する研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多様体間の写像は数学のみならず自然科学全般において重要な道具である。多様体間の滑らかな写像は、ほとんどの場合において特異点をもつ。滑らかな点における現象は把握し易いが、特異点における現象を理解するためには、その特異点の性質を深く知る必要がある。本研究では、多項式写像の無限遠の特異点や複素平面曲線特異点などの位相的性質について、これまでに知られている結果よりも更に深い理解を得ることに成功した。これらの結果は、今後の3次元多様体論と4次元多様体論を結び付ける研究や、多変数多項式写像の特異点および高次元多様体のファイバー束構造の研究のための基礎として、重要な役割を果たすものである。

研究成果の概要(英文)：We studied the information of manifolds and singularities using singular fibers of fiber bundles given by polynomial mappings and stable maps, and further described their global information. In the study of singularities at infinity of polynomial mappings, we proved that, in two-variable real polynomial case, the atypical values of singularities at infinity can be determined by using toric compactifications and toric resolutions. For complex plane curve singularities, we gave a way to describe the embeddings of the Milnor fibers into the Milnor ball by polyhedrons called shadows. This result was obtained by using the real morsification and A'Campo's divides. Concerning the study of 3-manifolds appearing on the boundary of fibrations of 4-manifolds, we studied a certain correspondence between flow-spines and contact structures.

研究分野：特異点論、トポロジー

キーワード：特異点 安定写像 トーリック型コンパクト化 3次元多様体論 接触構造 結び目理論

## 1. 研究開始当初の背景

多様体間の写像は、数学のみならず自然科学全般において重要な道具である。多様体間の滑らかな写像は、ほとんどの場合において特異点をもつ。滑らかな点における現象は把握し易いが、特異点における現象を理解するためには、その特異点の性質を深く知る必要がある。複素多項式写像（あるいは複素解析的写像）の特異点の研究においては、1960年代に Milnor がミルナー束を導入し、研究が飛躍的に進んだ。ここでミルナー束とは、特異点を中心とする十分小さい球面上にできる円上のファイバー束である。複素特異点の研究ではこのファイバー束により具体的な考察が可能となり、様々な良い性質をもつことが知られるようになった。一方、実特異点の研究では、Whitney, Thom, Mather らにより写像の安定性の観点から研究が進められた。写像の空間内で写像を少し動かしても性質が変化しないとき、その写像は安定であるという。安定写像の研究は安定写像の存在、特異点の分類などを中心に研究が進められた。

実多項式写像の特異点についても、それが孤立特異点であればミルナー束が存在することが Milnor により知られている。しかし、安定写像の特異点は孤立特異点ではないため、ファイバー束による研究が複素多項式写像の特異点と同じようには進められない。研究が難しくなる要因はいくつもあるが、特に、特異値集合によりターゲットの多様体が分割される場合に、その連結成分によってファイバーの形が変化することが大きな要因の一つに挙げられる。

近年、複素特異点論の研究において、 $f\bar{Y}g$ -型の特異点や混合多項式特異点のように、複素共役変数を使って表される実特異点の研究が進められている。これは複素特異点の良い性質を生かした状態で、実特異点の研究を進めようという立場の研究である。しかし、現在までの研究は実多項式写像が孤立特異点を持つ場合に限定して進められており、実写像の研究において重要視されるべき安定写像からは大きく離れた状態である。それとは別に、近年、低次元トポロジーにおいて注目されている broken レフシェッツ束の研究では、複素モース型特異点の安定写像への変形が扱われるなど、変形を通じて複素特異点と実特異点を結びつける研究が進められている。

これまでの研究において、複素2変数の  $f\bar{Y}g$ -型特異点のミルナー束と両立する接触構造についての研究を行い、それらは常に *overtwisted* であることを示した。それは  $f\bar{Y}g$ -型特異点が複素特異点とは大きく異なることを意味するが、同時に  $f\bar{Y}g$ -型特異点のような良い性質を持つ実特異点であれば、複素特異点と同じ発想で研究が進められることを意味している。その後の研究では、上述の流れに従い複素特異点の研究を安定写像の研究に結び付けるため、Brieskorn 型複素特異点の安定写像への線形な変形の研究、3次元多様体から2次元平面への安定写像とシャドウおよび多様体の双曲性に関する研究を行った。線形な変形の研究は複素特異点のミルナー束のモノドロミーが実写像への変形でどのように分裂するかを考察するための準備として行ったものである。

## 2. 研究の目的

多項式写像や安定写像が与えるファイバー束の特異点を利用して、多様体や代数曲線の情報を引き出すことを研究の目的とする。上述の学術的背景をもとに、特異点の実写像への変形や多面体への変形を利用して特異点の情報を読み取り、さらに大域的な情報を記述する。また、円作用や接触構造、多面体などの付加的な情報を研究に組み込むことで、高次元の特異点や高次元多様体の研究への応用を視野に入れる。

## 3. 研究の方法

安定写像の特異値集合やスタイン分解からファイバーの情報を具体的に読み取る。Lekili の論文で述べられているように、4次元多様体から2次元平面への安定写像のカスプの近傍では、種数1の曲面に消滅サイクルを描くことで、ファイバー束の変化を記述することができる。ただし、論文にはミルナー球体で特異点近傍を切り取る議論なく、大域的な考察や高次元への応用を視野にいれると不十分である。研究では、まず Lekili のファイバーの記述を特異点論の立場で精密化する。次に、得られた結果を元に、4次元多様体からの安定写像による4次元多様体の再構成の研究を進める。Turaev のシャドウは4次元多様体に対して定義されたものであり、3次元のシャドウにおける多様体の再構成は特殊な境界付き4次元多様体にも適用される。これをベースにして、多面体の面に与える情報を4次元多様体に適用できるように組み換え、4次元多様体の記述を与える。レフシェッツ束との関係や、単連結な4次元多様体や連結和操作などに着目し、より具体的な考察を与えることで、4次元多様体の大域的性質と安定写像のファイバーとの関係を明確にする。

応用として、その記述を複素特異点の安定写像への変形に適用することで、複素特異点がどのような安定写像に変形されるかについての研究を進める。さらに suspension の手法を用いて高次元化を進める。4次元多様体内のカスプ近傍のファイバーの記述は Thom-Sebastiani の手法により高次元のカスプ近傍のファイバーに拡張される。ただし、この手法は複素孤立特異点に対する手法のため、実写像のカスプ特異点に対する Thom-Sebastiani 型の定理を示す必要がある。ホモロジーレベルでの証明ではなく、多様体の幾何的構成を視野に入れ、より幾何的な

主張を得ることを目標とする。

また、これらの研究の3次元多様体論における側面からの研究として、スパインと接触構造に関する研究を行う。スパインとは3次元多様体から開球体を取り除いて、さらに縮約を行うことで得られる2次元多面体である。Turaevのシャドウとの対応を与えることが重要な研究課題となる。接触構造については、3次元多様体のオープンブック分解との間にGiroux対応と呼ばれる良い対応が存在することが知られている。レフシェッツ束の境界には自然にオープンブック分解が現れることから、その対応は複素特異点のミルナー束とも強く関係している。スパインと接触構造を結び付けることで、Giroux対応のスパイン版を構築し、Turaevのシャドウと結び付け、最終的には安定写像と接触構造との関係を多面体を經由して与える。また、トロピカル曲面は多面体の構造をもち、シャドウとの関係も指摘されている。多様体の再構成のアイデアをトロピカル幾何に適用することで、多様体間の写像のトロピカル化の枠組みを構築する。

#### 4. 研究成果

##### (1) 多項式写像の無限遠の特異点のトーリックコンパクト化による特徴付け

多項式写像が特異点をもつ場合、そのファイバーの近傍ではファイバー束の局所自明性が成り立たないが、全空間が非コンパクトであるため、特異点を持たない場合でもファイバー束の局所自明性が成り立たないことがある。この現象を「無限遠の特異点」と呼ぶ。Tat-Thang Nguyen氏とTien-Son Pham氏との共同研究で、実2変数多項式写像の無限遠における特異点について、その特異ファイバーの有無をトーリック型のコンパクト化を使うことで具体的に判定できることを示した。この結果はCoste-Puenteの論文にあるアルゴリズムよりもより明確なアルゴリズムを与えている。特に、多項式のニュートン図形がニュートン非退化であり、かつbad faceと呼ばれるニュートン図形の特別な辺上の関数がモース関数である場合について、特異ファイバーはモース関数の特異点と一致することを示した。その無限遠の特異点の特異値集合はbad face上のモース関数の特異値集合と一致する。Bad face上の関数がモース関数でない場合やニュートン図形が退化している場合についても、トーリック型特異点解消を行うことで無限遠の特異ファイバーを判定することが可能となる。特に特異ファイバーの数および特異値の数を、多項式のニュートン図形の辺上の実多項式の零点の数などで上から評価することができる。

##### (2) 複素特異点の変形から得られる特異値集合のinnermost成分に関する研究

稲葉和正氏、川島正行氏、Tat-Thang Nguyen氏との共同研究で、実可微分写像の孤立特異点の変形として現れる特異値集合の形についての研究を行った。複素モース特異点の場合、実変形により外向きのカスプが3つある単純閉曲線が特異値集合として現れることが知られている。この研究は、このモース特異点についての結果を実孤立特異点に拡張するものである。1以外の任意の非負の整数 $k$ に対し、実4次元ベクトル空間から平面への可微分写像の孤立特異点で、その変形の特異値集合がちょうど $k$ 個の外向きのカスプをもつ単純閉曲線となるものが存在することを示した。また、逆に、外向きのカスプをちょうど1つもつ単純閉曲線は、実4次元ベクトル空間から平面への可微分写像の孤立特異点の変形からは得られないことを示した。

##### (3) 仮想トーラス結び目の結び目解消数の研究

柳宏和氏との共同研究で仮想トーラス結び目の結び目解消数についての研究を行い、特別な場合についてそれを決定した。仮想トーラス結び目とはトーラス結び目の通常のブレイド図式の交点の一部を仮想交点に変えたものである。このような仮想化は4次元多様体内の曲面を扱う際に有効に働くことがある。研究では縦一列を仮想交点に変えた仮想トーラス結び目を研究対象とし、その結び目解消数が通常のトーラス結び目の結び目解消数の公式と一致することを示した。トーラス結び目の結び目解消数は代数曲線の種数の最小性に関するThom予想から従うものであり、仮想トーラス結び目に対して同じ結果が得られたことは、同様の性質が曲面結び目等に対しても成り立つ可能性を示唆している。

##### (4) シャドウによる平面曲線特異点の変形とレフシェッツ束構造に関する研究

平面曲線特異点のミルナーファイバーのシャドウによる表示方法を与えた。ミルナーファイバーは4次元球体内に埋め込まれた曲面であるが、実モース化およびA'Campoによるディバイドを經由することで、その埋め込みの多面体による表示を与えることに成功した。実モース化によるモノドロミーの読み取りはホモロジーサイクルの基底を固定した上でのPicard-Lefschetz公式の正しい読み取りを必要とするが、シャドウによる表示ではミルナーファイバーがシャドウの部分曲面として見えているため、その向きからデーンツイストの方向を自然に読み取ることができ、モノドロミー行列の作成が各段に簡易化されることになる。さらにフリーディバイドと呼ばれる一般化されたディバイドに応用することで、あるクラスに対して、そのレフシェッツ束構造が具体的に読み取れることを示した。この結果は特異点とレフシェッツ束をシャドウ表示で結び付けるもので、境界にあるミルナー束や特異点のリンクに着目することで、3次元多様体のオープンブック分解や接触構造との対応の解明が期待できる。さらに、この手法は代数的に与えられた4次元空間内の曲面の表示を可能とし、平面曲線や超平面配置の大域的な研究への応用が期待できる。

(5) フロースパインと接触構造に関する研究

低次元トポロジーの視点からの研究として、3次元多様体のフロースパインと接触構造に関する研究を行った。安定写像はそのスタイン分解として得られる多面体をシャドウとみなすことで、多面体の構造と密接に関係している。研究は3次元多様体内の多面体であるスパインと接触構造との関係を調べることで、安定写像との関連を模索するものである。研究の方針として、半田伸氏との共同研究として、接触多様体の Reeb ベクトル場をフローとするフロースパインを考え、フロースパイン上に現れる特性葉層の研究を行った。ストークスの定理からくる条件を精査することで、接触形式を生むフロースパイン上の1形式の存在定理を証明し、さらに特性葉層とスパインの特異集合との接点についての考察を行った。また、石井一平氏、古宇田悠哉氏、直江央寛氏との共同研究で、フロースパインに対する接触構造の具体的構成などについて研究を進めた。研究では、正のフロースパインという概念を導入し、正フロースパインに対する3次元接触多様体の存在、その接触同相類の一意性、3次元接触多様体に対する正フロースパインの存在の3つの主張を研究し、証明の概要を与えた。正のフロースパインという概念は本研究で新しく導入されたものであるが、接触構造の存在の必要条件となるストークスの定理の適用条件が満たされ、さらに reference 1-形式と呼ばれる confoliation の1-形式を具体的に構成できるという、対応を与える上で重要となる条件をみたく適切な設定になっている。研究ではさらに、いくつかの正フロースパインに対し、対応する3次元接触多様体の決定を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

石川昌治、直江央寛、Milnor fibration, A'Campo's divide and Turaev's shadow, Proceedings of FJV2017 Kagoshima, "Singularities Kagoshima", 査読有、2020、掲載決定

石川昌治、Tat-Thang Nguyen、Tien-Son Pham、Bifurcation sets of real polynomial functions of two variables and Newton polygons, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有、2020、掲載決定

石川昌治、柳宏和、Virtual unknotting numbers of certain virtual torus knots, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有、26 巻、No. 11、2017、1750070、DOI: 10.1142/S0218216517500705

稲葉和正、石川昌治、川島正行、Tat-Thang Nguyen、On innermost circles of the sets of singular values for generic deformations of isolated singularities, Acta Mathematica Vietnamica, 査読有、42 巻、2017、237 - 247、DOI: 10.1007/s40306-016-0200-1

〔学会発表〕(計 15 件)

石川昌治、Abalone, Seifert fibration and coil surgery、研究集会「Geometric Topology of low dimensions」、2019

石川昌治、Positive flow-spines and contact 3-manifolds、研究集会「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2019」、2019

石川昌治、Shadow presentation of Milnor fibers、Workshop on Topology of Singularities、2019

石川昌治、平面曲線特異点のミルナー束の shadow による表示、金沢大学・学習院大学合同トポロジーセミナー、2018

石川昌治、オープンブック分解のモノドロミーベクトル場の  $\ell$ -型フロースパインの構成、第41回箱根セミナー(2018)、2018

石川昌治、3次元多様体および3次元接触多様体の複雑度について、東京女子大学トポロジーセミナー、2018

石川昌治、Positive flow-spines and contact 3-manifolds、火曜トポロジーセミナー(東京大学)、2018

石川昌治、3次元多様体の正フロースパインと接触構造、微分幾何・トポロジーセミナー(慶應義塾大学)、2018

石川昌治、Singularity at infinity of real polynomial maps of two variables、The 13th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar、2018

石川昌治、Complexities of 3-dimensional manifolds、談話会(Hanoi National University)、2017

石川昌治、Lecture on Contact Topology in Singularity Theory、セミナー(VIASM)、2017

石川昌治、The bifurcation set of a real polynomial function from a viewpoint of toric compactification、談話会(ダラット大学)、2016

石川昌治、The bifurcation set of a real polynomial function from a viewpoint of toric

compactification、セミナー (VIASM)、2016

石川昌治、多項式写像の無限遠の特異点とニュートン図形、トポロジー金曜セミナー (九州大学)、2016

石川昌治、Stable maps and branched shadows of 3-manifolds、研究集会「III International Conference “Quantum Topology”」、2016

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。