

令和 2 年 6 月 24 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05144

研究課題名（和文）埋め込みのなす空間の位相幾何学から見る，有限型不変量の幾何学的解釈

研究課題名（英文）An interpretation of finite type invariants from the viewpoint of the topology of embedding spaces

研究代表者

境 圭一（Sakai, Keiichi）

信州大学・学術研究院理学系・准教授

研究者番号：20466824

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：ユークリッド空間の間のlong embeddingと呼ばれる型の埋め込み全体のなす空間について，位相幾何学的な観点から研究を行った．研究期間内に得た成果のうち最も重要なものは，long knot（1次元の埋め込み）の空間について，その分類空間と呼ばれる空間が"short ropeの空間"とホモトピー同値であることを示したものである（森谷駿二氏（大阪府立大）との共同研究）．このほか，long embeddingの空間のコホモロジー類を構成するため，L無限代数を用いた方法や，配置空間積分という方法が示唆する幾何学的な方法を用いた研究を行った．

研究成果の学術的意義や社会的意義

Short ropeを用いたlong knotの空間の分類空間の特徴づけはMostovoyによる予想の肯定的解決である．結果自体はもちろん重要であるが，証明に用いた手法はGalatiusとRandal-Williamsらが「コボルディズム圏」の研究に使ったものであり，具体的な問題への応用の可能性を示したという意味でも意義深い．また数学にとどまらず諸分野への応用が期待される「結び目理論」について，本研究成果は1つの拡張として"short ropeの族の分類"を考えることの意味を与えており，その点でも重要である．

研究成果の概要（英文）：I have studied the space of long embeddings between Euclidean spaces from the viewpoint of topology. One of the most important results that I have obtained in the duration is the characterization of the classifying space of the space of long knots (i.e. 1-dimensional embeddings) as the space of "short ropes". This is joint work with Syunji Moriya (Osaka Prefecture University). Other results include the construction of the cohomology classes of the space of long embeddings using L-infinity algebras and a geometric methods inspired by the "configuration space integrals".

研究分野：位相幾何学

キーワード：埋め込みの空間 グラフ 配置空間 オペラッド L無限代数

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、ユークリッド空間の間の”long embedding”と呼ばれる型の埋め込み全体のなす位相空間について、位相幾何学的な立場から研究を行ってきた。研究開始当初の段階で、次のような問題意識があった。

Long embedding の空間のコホモロジー類はグラフのなす複体のコホモロジーとして記述されることが Arone-Turchin により知られていたが、彼らの方法では埋め込みの余次元に何らかの制約があった。一方で、研究代表者が主に考えてきた「配置空間上の積分」という方法によれば、その制約は回避される(代わりに、グラフコホモロジーから直ちに埋め込みの空間のコホモロジーが得られるか不明な場合もあるという困難はある)。配置空間上の積分でどの程度のコホモロジー類が得られるのか、またグラフコホモロジー類を具体的に構成する方法はあるのか、ということについては現在でも完全な理解には至っていない。これらの点について何らかの知見を得ることが目標の1つであった。配置空間上の積分は「有限型不変量」と呼ばれる埋め込み不変量の構成の高次元化と呼べるものであり、有限型不変量が幾何学的にどのような意味を持つか調べる上で重要な問題と考えられた。

また long knot (1次元の3次元への埋め込み)の空間の分類空間が”short rope”と呼ばれる埋め込みの空間とホモトピー同値か、という Mostovoy の問題が未解決であり、その解決も目標の1つであった。これは次の2つの意味で重要な問題と考えられた。1つは結び目の分類や有限型不変量の理論の拡張を与えることになるという点、もう1つは1次元埋め込みの空間の群完備化について、その”delooping”を幾何学的に特徴づけることになるという点である。

2. 研究の目的

上記の通り、埋め込みの空間のコホモロジー類をグラフの言葉で記述すること、long knot の空間の分類空間のホモトピー論的な特徴づけを目的とした。また、過去の研究において、平面上の一般的な閉曲線に関する Arnold の不変量が埋め込みの空間を調べる際にも重要であることがわかっていたため、それについても研究を行った。

3. 研究の方法

Long knot の空間の分類空間については、long knot を0次元多様体の間のコボルディズムと見なすことにより、Galatius と Randal-Williams らが用いた「コボルディズム圏の分類空間」を調べる手法を応用できるというアイデアを森谷駿二氏(大阪府立大)から教示いただき、森谷氏と共同で研究を開始した。

埋め込みの空間のコホモロジー類を与えるグラフコホモロジー類の構成については、次の3つの事実をヒントに研究を行った。

- ・ Bar-Natan らによる、Lie 環を用いた有限型不変量の構成
- ・ Kontsevich らによる、 A 無限代数を用いた、リボングラフコホモロジー類の構成
- ・ Kontsevich, Conant-Vogtman による、オペラッドで色付けされたグラフ複体と Lie 環の Chevalley-Eilenberg 複体の関係

これらを考えると、埋め込みの空間の場合に考えるべきグラフ複体に対応する Lie 環の構成、ならびに L 無限代数を使ったコサイクルの構成が必要であると考えられた。

4. 研究成果

Long knot の空間の分類空間については、森谷駿二氏との共同研究により、Mostovoy の予想を肯定的に解決し、さらに高次元空間内の long knot の空間についても分類空間を short rope の空間として特徴づけることができた。より具体的には、long knot の空間の分類空間と short rope のなす空間が、ともにユークリッド空間内の1次元部分多様体のなす空間とホモトピー同値であることを示した。これにより long knot の空間の群完備化の delooping を、short rope の空間として幾何学的に特徴づけることができた。これについては論文を専門誌に投稿し、その後掲載された。

またグラフによるコホモロジー類の構成については、チェイン複体として非輪状であるような L 無限代数を用いてグラフコホモロジー類を構成できることを示した。 L 無限代数として特に半単純 Lie 環を用いれば、Bar-Natan による有限型不変量の構成が復元されるような構成になっている。ただしこの構成については、場合によっては得られるコホモロジー類が0であることが示せてしまうため、そのような状況を回避するための改良を必要とすると考えている。

これとは別に、杉山龍太郎氏(研究当時は信州大学在学)との共同研究により、平面上の一般的な閉曲線に対する Arnold 不変量について研究を行い、平面閉曲線の「一般化された連結和」を導入し、これに関する Arnold 不変量の和公式を得た。これは Arnold や、Mendes de Jesus-Romero

Fuster らにより調べられていた和公式を，最も一般的な形にまで拡張したものである．平面閉曲線は，結び目（1次元の埋め込み）を平面に射影したときの「影」と考えられ，結び目の情報の一部を持った対象である．そのため，本研究の目的にとって Arnold 不変量は重要である．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Keiichi Sakai, Ryutaro Sugiyama	4. 巻 255
2. 論文標題 Generalized connected sum formula for the Arnold invariants of generic plane curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 86-108
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2018.12.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Syunji Moriya, Keiichi Sakai	4. 巻 18
2. 論文標題 The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Algebraic and Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 2859-2873
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2018.18.2859	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 7件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 境 圭一
2. 発表標題 Lin-Wang type formula for Haefliger's invariant
3. 学会等名 トポロジー金曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 境 圭一
2. 発表標題 The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots
3. 学会等名 第65回トポロジーシンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Keiichi Sakai
2. 発表標題 The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots
3. 学会等名 The 59th Cascade Topology Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 境 圭一
2. 発表標題 The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots
3. 学会等名 東京大学トポロジー火曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 境 圭一
2. 発表標題 The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots
3. 学会等名 京都大学代数トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 境 圭一
2. 発表標題 The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots
3. 学会等名 信州トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 境 圭一
2. 発表標題 Generic閉曲線の一般化された連結和に対するArnold不変量の公式
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 境 圭一
2. 発表標題 The space of short ropes and the classifying space of the space of long knots
3. 学会等名 研究集会「結び目の数学IX」
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Keiichi Sakai
2. 発表標題 Lin-Wang type formula for the Haefliger invariant
3. 学会等名 Spaces of Embeddings: Connections and Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keiichi Sakai
2. 発表標題 L-infinity algebras and graph cocycles
3. 学会等名 Homotopy Theory Symposium 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Website of Keiichi Sakai
http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/index_j.html
Webpage of Keiichi Sakai
<http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/index.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----