

令和元年6月19日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05152

研究課題名(和文) トーリックトポロジーの展開

研究課題名(英文) Development of toric topology

研究代表者

栞田 幹也 (Masuda, Mikiya)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00143371

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：トーラス群作用の幾何・トポロジー、組合せ論の研究を行った。(1) 3次元双曲空間において各頂点で直角となるように実現できる凸多面体(Pogorelov多面体)上のsmall cover (Loebell type と呼ばれる3次元双曲多様体)が、 $Z/2$ 係数のコホモロジー環で区別できることを示した。(2) Regular nilpotent Hessenberg varietyのコホモロジー環が超平面配置の対数的微分作用素の加群から得られる環と同型であることを示し、既知のA型の結果を一般のリー型に拡張し、た(3) n -cubeの1つの頂点をカットした凸多面体上のトーリック多様体を分類した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1) 3次元双曲多様体は、Mostow剛性により基本群で区別できるが、Loebell type の双曲多様体に限れば、基本群よりずっと弱い不変量である $Z/2$ 係数コホモロジー環で区別できることを示したのは、特筆すべき結果と思う。(2) Regular nilpotent Hessenberg varietyのコホモロジー環と超平面配置を結びつけたのは驚く結果と思う。(3) 分類結果の副産物として、射影的代数多様体の構造と非射影的代数多様体の構造の両方をもつ微分可能多様体が、トーリック多様体の範疇に存在することが分かったことは新しい知見である。

研究成果の概要(英文)：I studied geometry and topology of torus actions and related combinatorics. In particular I have obtained the following results.

(1) Convex polytopes which can be realized as right angle polytopes in the 3-dimensional hyperbolic space are called Pogorelov polytopes and small covers over them become hyperbolic 3-manifolds. We have shown that they can be distinguished by their $Z/2$ -cohomology rings. (2) We have shown that the cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties are isomorphic to rings obtained from logarithmic derivations on hyperplane arrangements and extended known results on the cohomology rings for type A to any Lie type. (3) We have classified toric manifolds over an n -cube with one vertex cut.

研究分野：トポロジー、組合せ論、代数幾何

キーワード：トーリック多様体 ヘッセンバーク多様体 凸多面体 トーラス群作用 同変コホモロジー

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

2000年頃から、トーリック多様体論をトポロジーの観点から展開するトーリックトポロジーという新しい分野が生まれ、その開拓を進めている。トーリックトポロジーは、トーラス群作用をもつ良い空間のトポロジーを群作用を利用して調べることで、また、それに関連した組合せ論など他分野との関連を探ることである。これまでは、トーリック多様体(もっと一般にトーラス多様体)のトポロジーと、それに関連する組合せ論を主に研究してきた。

2. 研究の目的

本研究では、このトーリックトポロジーを一層実りあるものにするを研究目的とする。そのための1つの方向として、これまでのアイデアを押し進めてトーリックトポロジーの深化を目指す。またもう1つの方向として、トーラス群作用が有効に使われトーリックトポロジーと似た思想をもつ同変シューベルトカリキュラスの線上にあって色々な数学と関係している Hessenberg variety をトーリックトポロジーの立場から研究し、トーリックトポロジーの枠組みを広げることを目指した。

3. 研究の方法

(1) Hessenberg variety に関して、阿部、原田、堀口らと共同研究を行ってきたが、彼らとの共同研究を進めた。Regular semisimple Hessenberg variety のコホモロジーの対称群表現は、Goresky-Kottwitz-MacPherson による GKM 理論に基づいており、これを掘り下げた。

(2) 旗多様体のトーラス軌道の閉包、それに関連する凸多面体の組合せ論に関しては、この問題に興味をもっている Eunjeong Lee 氏、Seonjeong Park 氏と共同研究を進めた。

4. 研究成果

大きく分けて4つのテーマに関して研究を行い、以下の成果を得た。

(1) Hessenberg variety に関して

(i) 阿部(拓) - 原田 - 堀口との共同研究において、A型の regular nilpotent Hessenberg variety のコホモロジー環の明示的な表示を与え、そのコホモロジー環と regular semisimple Hessenberg variety のコホモロジー環のワイル群不変な部分環とが同型であることを示していたが、阿部(拓郎) - 堀口 - 村井 - 佐藤との共同研究において、この事実を一般のリー型に拡張した。そのアプローチは、阿部(拓) - 原田 - 堀口との共同研究とは全く異なり、超平面配置の対数的微分作用素を用いた。

(ii) 阿部(拓) - 堀口との共同研究において、Hessenberg 関数 h が $h=(h(1), n, \dots, n)$ の場合に regular semisimple Hessenberg variety のコホモロジー環の明示的な表示を与えた。非常に特別な場合であるが、 $h=(2, 3, \dots, n, n)$ 以外では初めての結果である。

(iii) 原田 - 堀口 - Park との共同研究において、regular semisimple Hessenberg variety たちの体積多項式を Gelfand-Zetlin 多面体と関連させて調べた。

(2) Buchatber-Erokhovets-Panov-Park との共同研究において、Pogorelov polytope と呼ばれる3次元凸多面体上の quasitoric manifold と small cover についてコホモロジー剛性が成立することを示した。特に small cover の場合は Loebell type と呼ばれる双曲多様体で、それらが、基本群よりずっと弱い不変量である $Z/2$ 係数コホモロジー環で区別できるというものである。

(3) n-cube の1頂点カット上のトーリック多様体の分類

蓮井 - 鋤田 - Park との共同研究において、n-cube の1頂点カット上のトーリック多様体を代数多様体として、および、微分可能多様体として分類した。射影的でないトーリック多様体として一番簡単なものとして知られている Oda's 3-fold の高次元版が見つかった。また、副産物として、射影代数多様体の構造と非射影代数多様体の構造を併せ持つ微分可能多様体が、トーリック多様体の中に存在することが判明した。

(4) 旗多様体上のトーラス軌道の閉包

Eunjeong Lee 氏と、Schubert variety 内のトーラス軌道で一般的なものの閉包が非特異性、ポアンカレ多項式などを調べた。その後、Seonjeong Park 氏が加わって、Schubert variety の一般化である Richardson variety のモーメント写像である Bruhat interval polytope の組合せ的性質を調べた。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 11 件)

- [1] H. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, The cohomology rings of regular semisimple Hessenberg varieties for $h=(h(1),n,\dots,n)$, J. of Combinatorics, 10 (2019), 27-59.
- [2] S. Hasui, H. Kuwata, M. Masuda and S. Park, Classification of toric manifolds over an n -cube with one vertex cut, published online in IMRN.
- [3] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, Hessenberg varieties and hyperplane arrangements, published online in Journal für die reine und angewandte Mathematik.
- [4] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, M. Masuda, The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A, published online in IMRN.
- [5] V. Buchstaber, N. Erokhovets, M. Masuda, T. Panov, S. Park) Cohomological rigidity of manifolds defined by 3-dimensional polytopes. Russian Math. Surveys 72 (2017), no. 2, 199–256.
- [6] S. Kuroki and M. Masuda, Root systems and symmetries of torus manifolds. Transform. Groups 22 (2017), no. 2, 453–474.
- [7] A. Ayzenberg, M. Masuda S. Park and H. Zeng, Cohomology of toric origami manifolds with acyclic proper faces. J. Symplectic Geom. 15 (2017), no. 3, 645–685.
- [8] H. Kuwata M. Masuda and H. Zeng, Torsion in the cohomology of torus orbifolds. Chin. Ann. Math. Ser. B 38 (2017), no. 6, 1247–1268.
- [9] A. Higashitani and M. Masuda, Lattice multipolygons. Kyoto J. Math. 57 (2017), no. 4, 807–828.
- [10] S. Choi, M. Masuda and S-i. Oum, Classification of real Bott manifolds and acyclic digraphs. Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), 2987–3011.
- [11] A. Ayzenberg and M. Masuda, Volume polynomials and duality algebras of multi-fans, Arnold Math. J. 2 (2016), no. 3, 329–381.

〔学会発表〕(計 10 件)

- [1] Generic torus orbit closures in Schubert varieties, 日本数学会一般講演, 岡山大学, 2018年9月27日
- [2] Generic torus orbit closures in Schubert varieties, Hyperplane arrangement, RIMS, 2018年6月12日
- [3] Topology of Hessenberg varieties and related topics, IBS Center for Geometry and Physics, Pohang, 2019年3月6~8日(3 talks)
- [4] The cohomology rings of regular semisimple Hessenberg varieties for $h=(h(1),n,\dots,n)$, Hessenberg Varieties in Combinatorics, Geometry and Representation Theory, Banff, 2018年10月23日
- [5] Cohomological rigidity problems in toric topology, Glances@Manifolds III, Krakow, 2018年7月3日
- [6] Generic torus orbit closures in Schubert varieties, International conference "Algebraic Topology, Combinatorics, and Mathematical Physics" on occasion of Victor Buchstaber's 75th birthday, Moscow, 2018年5月24日
- [7] Some topics on Hessenberg varieties, Ajou University, Colloquium 2018年3月16日
- [8] Cohomology of Hessenberg varieties, IBS workshop, 2018年3月12日
- [9] Volume polynomials of regular nilpotent Hessenberg varieties. Princeton-Rider Workshop On the Homotopy Theory of Polyhedral Products, 2017年6月1日
- [10] Cohomology of regular Hessenberg varieties, Glances@Manifolds 2, Krakow, ポーランド, 2016年8月9日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等
なし

6 . 研究組織

(1)研究分担者
なし

(2)研究協力者
なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。