2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年 　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６７０

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2018

課題番号：１６Ｋ０５１５７

研究課題名（和文）カンドルを用いた自明結び目の判定とほどき方の明示

研究課題名（英文）Decision of triviality of knots and search for unknotting moves using quandles

研究代表者

林　忠一郎（Hayashi, Chuichiro）

日本女子大学・理学部・教授

研究者番号：２０２８１３２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：結び目は３次元空間内の輪であり、自己交差を許さずに連続的に動かしても同じ結び目とみなされる。平面上に自己交差無しに乗せられる結び目を自明結び目と呼び、ほどける結び目を意味する。結び目の射影図の基本変形に密接に関連する公理を持つカンドルという代数がある。結び目の射影図の弧たちに或る条件（交差点条件）を満たすようにカンドルの元を対応させるカンドル彩色がよく研究されている。どんなカンドルによっても自明な彩色しか持たない射影図は自明結び目を表すことを用いて、与えられた射影図が自明結び目を表すことを判定する有限手続きを考案し、それが１１交差点までの自明結び目の射影図に対して有効であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
与えられた結び目が自明であるか否か判定する有限アルゴリズムは、Hakenや、HassとLagariasや、Dynnikovによる研究などがある。また、カンドルを用いて与えられた結び目がほどけないことを示すことは多くの研究がある。ここでは、カンドルを用いて与えられた結び目が自明結び目であることを判定する方法を考えた。カンドルを用いることで、自明結び目をほどくための紐の動かし方の手掛かりが得られると期待している。自然界のＤＮＡの１パーセントは結び目になっているという研究や、ＤＮＡを輪の形にしてから酵素を作用させると、酵素の働き方がよく理解できるという研究もあり、その方面への応用があると期待する。

研究成果の概要（英文）：A knot is a circle in the 3-dimensional space R3. Two knots are regarded as the same if one is deformed into the other by a continuous deformation of R3 keeping its whole shape. A knot is called trivial if it can be deformed so that it lies in a plane. A trivial knot is a knot which can be untangled. There is an algebra called quandle which has axioms closely related to the elementary moves on knot diagrams. There are many studies on quandle colorings. A quandle coloring assigns elements of a quandle to arcs of a knot diagram so that the crossing condition is satisfied at each crossing. If a knot diagram has only trivial quandle coloring for any quandle, then it represents the trivial knot. Using this fact, we find a finite algorithm to decide a given knot diagram represents the trivial knot. We showed that this algorithm works for all the diagram of the trivial knot with 11 or less number of crossings.

研究分野：低次元位相幾何学

キーワード：自明結び目　カンドル

１．研究開始当初の背景

結び目とは３次元空間内の輪であり､連続的に動かしても同じ結び目とみなされる｡ただし、途中で紐同士を交わらせるのは反則である。

自然界の遺伝子 DNA の１パーセントは輪っか状の結び目になっているという学説があり、また、DNA を人工的に輪の形にしてから酵素を作用させると、できあがった輪の絡み具合から酵素の働き方がよく分かるという研究もある。

連続的に動かして平面上に交差点無しで乗せられる結び目は自明結び目と呼ばれ、ほどける結び目である。与えられた結び目が自明結び目か否か判定する問題は重要であり、数多くの研究がなされている。主要な判定方法として、①Haken の normal surface の理論による判定法（引用文献[H]）、②Hass & Lagarias の Reidemeister move による判定法（引用文献[HL]）、③Dynnikov による arc presentation による判定法（引用文献[D1], [D2]）、④Ozsvath-Szabo による knot Floer homology による方法（引用文献[OS]）、⑤Birman & Hirsch による closed braid を用いる方法（引用文献[BH]）の５つが良く知られている。しかし、①と②と⑥の方法は計算量が多すぎて、コンピューターを用いてもなお実用的でない。③の方法は arc の本数が少ないところでは、コンピューターを用いてかなり判定できるものの、やはり、ある有限の範囲内を虱潰しに調べる手続きを行うことになるところが不満であり、特に、ほどけないことを判定する場合に膨大な時間がかかる。④の方法は実際の計算が困難であるだけでなく、ほどくための紐の動かし方に繋がる手掛かりが得られそうにないと思われる。

２．研究の目的

３次元空間内の結び目の２次元平面への射影で、多重点は有限項の交差的な２重点だけであり、各２重点に交差の上下の情報が付いたものを結び目の射影図と呼ぶ。与えられた結び目の射影図が自明結び目を表すか否かの判定方法は数多くあるが、自明結び目を解(ほど)く紐の動かし方を明示する方法はまだない。

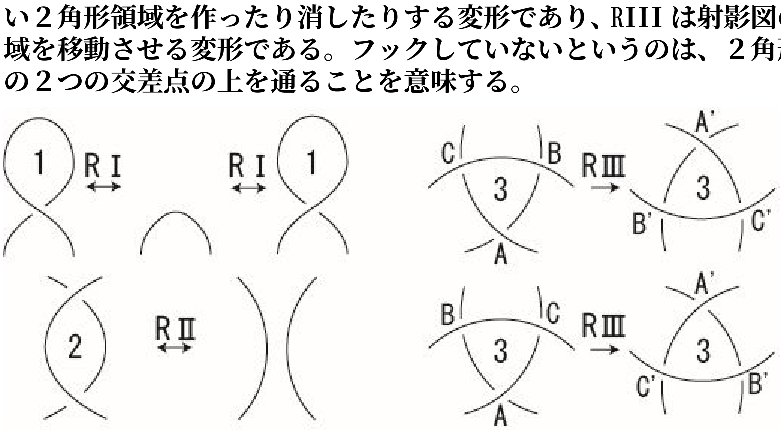
ところで、カンドルと呼ばれる代数は結び目の射影図の基本変形（Reidemeister 変形)と密接に関係した公理を持ち、特に、結び目に対して定義される結び目カンドルと呼ばれるカンドルは結び目を完全に分類することが Joyce や Matveev の研究によって知られている(引用文献ん[J], [M])。すなわち、２つの結び目が同じであることと、それらの結び目カンドルが同型であることは同値である。カンドル彩色は、結び目の射影図が非自明結び目を表すことを示すのによく使われており、近年は数多くの研究論文が発表され続けている。

本研究ではそのカンドル彩色を用いて、与えられた結び目の射影図が非自明ではなくてむしろ自明結び目を表すことを判定する方法を与え、自明結び目を表すか否か判定する有限アルゴリズムを構成し、さらに、その計算を手掛かりとして自明結び目の射影図を交差点無しにするための紐の動かし方を明示する有限アルゴリズムも構成することが目的である。

３．研究の方法

大雑把な方針としては、結び目の射影図が「非自明な結び目を表す」ことと、「何らかのカンドルによる非自明なカンドル彩色を持つ」ことが同値であることを用いて、与えられた結び目の射影図が自明結び目を表すか否か判定する。与えられた射影図のどんなカンドル彩色も自明彩色であることがカンドルの計算によって示されれば、その射影図は自明結び目を表すことが判定できる。以下、詳細を記す。

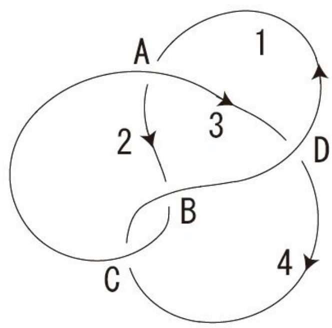
２つの結び目の射影図が同じ結び目を表すとき、一方の射影図に下図のような３種類の Reidemeister 変形 RI，RII，RIII を上手く組み合わせて有限回適用するともう一方の射影図に変形できることが知られている。Reidemeister 変形は結び目の射影図の局所的な変形であり、RI は射影図の１角形領域を作ったり消したりする変形であり、RII は射影図のフックしていない２角形領域を作ったり消したりする変形であり、RIII は射影図のフックしていない３角形領域を移動させる変形である。フックしていないというのは、２角形や３角形の辺の１つが両端の２つの交差点の上を通ることを意味する。



カンドルは RI，RII，RIII の３種類の Reidemeister 変形に深く関連した等式を満たす代数であり、図形の何らかの対称性を捉えることができる。正確に言うと、カンドルは集合Ｑとその上の２項演算*からなり、(Q1) Q の任意の要素 a に対して a*a=a、(Q2) Q の任意の要素 b と c に対して a*b=c となる a が(b と c に応じて)唯一つ存在する、(Q3) Q の 任意の要素 a,b,c に対

して(a*b)*c=(a*c)*(b*c)の３つの条件を満たすもののことである。(Q1),(Q2),(Q3)はRI,RII,RIII 変形にそれぞれ対応することが知られている。下の表は四面体カンドルと呼ばれるカンドルの演算表である。1,2,3,4 はカンドルの要素の名称もしくは番号であり、通常の数の 1,2,3,4 を意味するわけではない。表中の A,B,C,D は右の結び目の図の交差点に対応しており、後述する。

四面体カンドルの演算表と
三葉結び目の交差点４つの射影図の
四面体カンドル彩色の例



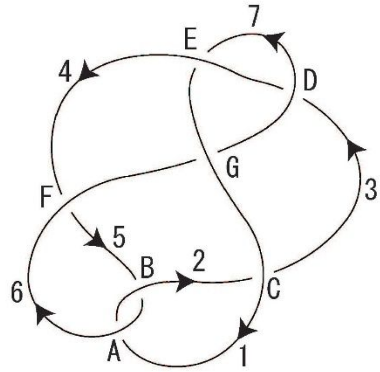
a*b の表	*1	*2	*3	*4
1*	1	3	4 C	2
2*	4	2	1 A	3
3*	2 B	4	3	1
4*	3 D	1	2	4

カンドル彩色を説明する。Q をカンドル、D を向き付けられた結び目の射影図とする。結び目の紐を辿って、交差点の下を通る点から次に交差点の下を通るまでの部分を arc と呼ぶ。D の arc たち全てのなす集合を A(D)と置く。各 arc に対して Q の要素を 1 つずつ対応させる写像 c:A(D)→Q が Q 彩色であるとは、D の各交差点で以下の交差点条件を満たすことである。t を交差点の上を通る arc、u を t の進行方向を向いて右側の arc、s を左側の arc とする。c(u)*c(t)=c(s)が交差点条件である。上の図はカンドル彩色の具体例で、三葉結び目の４交差点の射影図の四面体カンドル彩色を表している。各交差点 A,B,C,D の交差点条件は四面体カンドルの演算表の A,B,C,D と書いてあるマス目の演算に対応する。

Q 彩色は D の全ての arc に対して Q の同じ要素を対応させるとき、自明彩色と呼ばれる。非自明な Q 彩色ができる結び目の図は自明でない結び目を表すことが知られている。Joyce と Matveev によって導入された結び目カンドルは非自明結び目の図を非自明に彩色することが知られている。(ただし、無限カンドルなので、自明か非自明か分からない結び目の射影図に対する結び目カンドルが与える彩色が自明か非自明かの判定は困難である。) したがって、どんなカンドルを用いても自明なカンドル彩色しかされない射影図は自明結び目を表すことになる。

判定のための実際のアルゴリズムは例えば以下のようなものを考える。結び目の図 D が与えられ、それは自明結び目を表すが、そのことを人間は知らないとする。D の任意のカンドルによる任意のカンドル彩色が自明であることを示せば、自明結び目を表すことが判定できる。D が何らかのカンドル Q によって彩色されていると仮定する。彩色によって arc たちに対応する Q の要素たちを相異なる記号 q1,…,qn によって表す。しかし、一旦、異なる記号で表しても、実は同じ要素である可能性がある。また、Q には他にも要素があるかもしれない。とりあえず q1,…,qn の範囲だけでカンドルの演算表を作ろうとする。対角の升目は(Q1)の条件によって埋まり、また、交差点条件に従って幾つかの升目を埋める。下図はその具体例である。

	*1	*2	*3	*4	*5	*6	*7
1*	1						
2*	3 C	2				1 A	
3*			3				4 D
4*				4			
5*					5	4 F	
6*	7 G	5 B				6	
7*				1 E			7



さらに(Q2),(Q3)の条件を用いて演算表を埋めていく。(Q2),(Q3)の条件だけでは計算が進まない場合は、どこかの列を１つ選んで、その空欄を全て新しい記号で埋める。新しい記号は q1,…,qn のどれかを表すかもしれないし、Q の他の要素を表すかもしれない。新しい記号の分まで演算表を拡大する。すると、大抵の場合は、再び(Q2),(Q3)の条件を用いて演算表が埋まっていく。たまに、この新しい記号で列を埋める操作をしても計算に進展が無い場合があるが、他の列に選び直して埋めると上手く行く。このように演算表の升目を埋めていき、同じ列に同じ要素が２つ現れると、異なる２つの記号で表していた Q の元が同じものであると(Q2)の条件から分かる。このように計算していき、全ての記号が Q の同じ元を表すことが分かれば、彩色が自明であることが示される。

(Q2),(Q3)を用いた計算はそれぞれ RII,RIII 変形に対応することが期待される。この新しい記号で升目を埋める操作は以下のように解釈できると期待される。「2 角形を作る RII 変形」や RIII 変形をすると、結び目の図に交差点の上を通らない短い arc が新しく生じるが、彩色によ

ってそれに対応するカンドルの要素も新しく生じる。それが新しい記号で表される。このように、計算からほどくための紐の動かし方の推測が付くと期待される。

４．研究成果

（１)上記のアルゴリズムでは１つの列の空欄を全て新しい番号で埋めて演算表を拡張したが、実際には、１つの列では足りず、２つの列をうまく選んでその空欄を埋める必要がある具体例も存在することが分かった。２列を埋めても計算が進まない具体例が存在するだろうと予想している。その場合でも、どこか１列を新しい番号で埋めて演算表を拡張した後に、さらにどこか１列を選んで既に拡張済みの演算表をさらに拡張するような操作が複数回繰り返せば計算が進むと考えている。それは今後の研究課題である。

（２）１１個以下の交差点を持つ自明結び目の射影図で、Reidemeister 変形で直ちに消すことができる１角形領域や２角形領域を持たないもの全てに対して、その図が自明結び目を表すことを上記の「研究の方法」に書いた有限アルゴリズムを少し変更した手順で判定できることを数値計算ソフトウェアの Mathematica のプログラムを組んで実行することによって示した。交差点が１１個の自明結び目の図の中には Goeritz の自明結び目の図があり、それを Reidemeister 変形で交差点無しに変形するには一旦交差点を増やす Reidemeister 変形を行う必要がある。そのような射影図に対しても、この有限アルゴリズムが有効な場合があることが分かった。

（３）Goeritz の自明結び目の図には twist が４か所あり、２か所は１回転 twist,１か所は１回転半 twist,残りの１か所は２回転 twist である。１回転半 twist と２回転 twist の回転数を１つずつ増やしていっても、やはり自明結び目を表し、さらに、ライデマイスター変形で解くには最初に交差点を増やすライデマイスター変形を適用しなければならない性質は受け継がれる。この方法でゲーリッツの図の拡張によって得られた無限個の「解（ほど）きにくい」自明結び目の図の列が得られる。この結び目の図たちに上記の自明性判定プログラムを実行してみたところ、４０交差点まではどの結び目の図に対しても１秒未満に自明結び目であることを判定する。また、交差点が４００個になっても 、判定に５秒もかからないことが分かった。数学的に証明できていないが、この有限アルゴリズムが有効な幾らでも交差点の多い自明結び目の射影図の無限列になっていると期待される。

研究課題の自明結び目の判定に関連して、学生たちとの共同研究により、以下の結果を得た。

（４）３次元球面の open-book decomposition Ｈに関して Morse の位置にある球面Ｓで、Ｈから由来する singular foliation に circle leaf が含まれないものは、自然に四角形分割される。その分割は、Ｈの軸との交点たちを頂点とし、各面の中心に saddle point が１つずつある。各 saddle point には符号がついていて、その点において軸の周りの角度が増える方向にＳが表向きなら＋であり、裏向きならーである。球面の符号付き四角形分割は、Morse の位置から由来しないものも存在する。Morse の位置から由来するための必要十分条件を求めた。或る種の四角形分割の基本変形によって、異符号の四角形２枚のみからなる四角形分割に変形できることがその必要十分条件である。このことは沖縄科学技術大学院大学での国際的な研究集会（下記②）での招待講演で口頭発表した。また、変形しないでも Morse の位置から由来することが判定できる十分条件を得て、日本大学での研究集会で口頭発表した。

（５）与えられた arc-presentation が split link を表すか否かを Dynnikov の方法によって判定する Mathematica のプログラムを作成した。trivial knot を表すか否かを判定する Mathematica のプログラムは既に私が作成してあったので、今回はその link 版を作成した。Mathematica の arc-presenstation を扱うパッケージは knot の場合しか扱えないので、link の arc-presentation を扱うためのデータ構造や基本的な関数から構成する必要があった。link は輪が複数なので、取り扱いがとても複雑になる。Dynnikov の方法は arc の数を増やさない変形である exchange と merge のみで明らかに split な状態の arc-presentation に変形するものだが、与えられた arc-presentation に対する exchange 操作を虱潰しに調べなければならない。しかし実際にプログラムを作成してみると、arc の本数が小さいところでは意外と速く動作する。ただし、arc の本数が多い場合や、split でない link が与えられたときには判定にかなりの時間がかかる場合があることが分かった。

（６）Dynnikov の arc-presentation による自明結び目の判定の論文（引用文献[D2]）の間違いを幾つか見つけ、それを修正した。例えば、spanning disk 上の singular foliation の部分的なパターンから spannning disk と結び目を変形して複雑さを軽減する議論をしているのだが、或るパターンに対する変形方法が通用しない場合があり、その場合には他の変形をすれば良いことを示した。

＜引用文献＞

[BH] J. Birman and M. Hirsch, “A New algorithm for recognizing the unknot”, Geom. Topol. 2(1998), 175-220.
[D1] I. A. Dynnikov, “Arc-presentation of links. Monotonic simplification”, Fundamenta Math. 190 (2006), 29-76.
[D2] I. A. Dynnikov, “Recognition algorithms in knot theory”, Russian Math. Surveys 58 (2003), 1093-1139.
[H] W. Haken, “Theorie der Normalflaechen, Ein Isotopiekriterium fuer der Kreisknoten“, Acta Math. 105 (1961), 243-375.
[HL] J. Hass, J. Lagarias, “The number of Reidemeister moves needed for unknotting”, J Amer. Math. Soc. 14 (2001), 399-4428.
[J] D. Joyce, “A classifying invariant of knots, the knot quandle”, J. Pure Appl. Algebra 12 (2003), 159-186.
[M] S. V. Matveev, “Distributive groupoids in knot theory”, Math. USSR Sbornik 47 (1984), 73-83.
[OS] P. Ozsvath, Z. Szabo, “Holomorphic disks and knot invariants”, Advances in Mathematics 186 (2004), 58-116.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　0　件）

〔学会発表〕（計　3　件）
① 林忠一郎, “S3 の open-book decomposition に関して Morse の位置にある球面(続き)”, Geometric Topology of low dimensions, 2019.
② Chuichiro Hayashi, “2-spheres in Morse positions with respect to the open-book decompositon of the 3-sphere”, Geometry and Topology of 3-manifolds, 2018.
③ Chuichiro Hayashi, “The Number of Reidemeister moves needed for connecting two diagrams of a knot”, Joint Symposium 2016, Ewha Womans University, Japan Women’s University and Ochanomizu University for the promotion and research for women in science, 2016.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
なし

６．研究組織
(1)研究分担者
なし

(2)研究協力者
なし