

令和 2 年 9 月 14 日現在

機関番号：32681

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05158

研究課題名(和文) CWL不変量の応用に関する総合的研究

研究課題名(英文) Comprehensive Study on Applications of CWL Invariants

研究代表者

圓山 憲子 (Maruyama, Noriko)

武蔵野美術大学・造形学部・教授

研究者番号：80147008

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的である理ホモロジー3球面へのCWL不変量について(1)これまでのCWL不変量に関する研究の継続的深化(2)RT torsion と組み合わせるCWL不変量適用有効性の検証(3) Seiberg-Witten不変量等との関係を視野に具体的研究を行いCWL不変量が捉える幾何学的現象の記述に取り組んだ。専門雑誌に4本、大学研究紀要1本を公表、研究会での口頭発表、研究会を開催し口頭発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

専門学術雑誌に公表した本研究成果では、CWL不変量の計算の主要部分であるデデキント和の計算法や振動する値を不等式で評価する方法の提案やどのように応用するのかの着眼点に学術的意義がある。例えば、双曲結び目から手術によって有限群位数のホモロジー群を持った有理ホモロジーレンズ空間が得られるのは有限個であるなど、既存の複雑な議論で得られた結果について粗いがCWL不変量が有限性を捕捉していること、有理ホモロジーレンズ空間の絡み形式に相当する不変量の組がCWL不変量的小数部分から得られること等があり、これからこの不変量について研究する若い研究者への布石として社会的意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：In the four years of the adoption period (2016-2019 including extension of one year), the objective of this comprehensive study on the Casson-Walker-Lescop (CWL) invariant for rational homology 3-spheres were the following three. (1) Continued research on the CWL invariants so far, (2) Validation of the effectiveness of applying the CWL invariants in combination with the Reidemister-Turaev torsion on rational homology 3-spheres and (3) Specific studies with a view to the relationship with other invariants such as the Seiberg-Witten invariants. She conducted research on describing geometric phenomena via the CWL invariant and published four papers in professional journals and one university research bulletin. In addition to making public announcements and making oral presentations at research meetings, we also hold research meetings with researchers in similar research fields to make oral presentations.

研究分野：幾何学

キーワード：3次元多様体 位相不変量 デデキント和 キャッソンウォーカー不変量 レスコップ不変量 ライデマ
イスタートウラエフ不変量 有理ホモロジー3球面 デーン手術

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) CWL 不変量は、Casson (1985 年)、Walker (1991 年)、Lescop (1996 年) が、順に対象を広げ不変量の一般的公式として確立してものである。その後 2005 年位までは既に古典的不変量に位置づけられおり、様々なタイプの 3 次元多様体の族に関する公式を求める研究がなされていた。

(2) 予備的研究として、2005 年から族に関する公式を導出することとは異なった方向性の必要性を強く感じ、有理数値で比較的扱いやすいこの不変量の特徴を生かした応用に関する研究を他の不変量との関係も視野に入れて進めていた。このような方向性の研究は知られていなかった。

2. 研究の目的

(1) CWL 不変量が結び目や絡み輪による手術問題や有理ホモロジー同境界群の構造等の現象をどのように捉えているかを記述すること。

(2) 上記の研究に基づき、例えば、非自明な結び目の整係数手術と有理同境の関係が CWL 不変量を調べることによって示唆されるが、実際に多様体として起きていることを解明し、不変量が示唆する幾何学的現象を明らかにすること。

(3) (1) と (2) を、RT-torsion や SW 不変量等、他の不変量と関連付けて研究すること。

3. 研究の方法

(1) 当研究では、不変量の計算のウェイトが高く、効率化のために研究支援ソフトウェアを導入する。

(2) 予備的研究を継続的に発展させる。

(3) 関連する他の不変量に関する研究結果に関する情報を研究者との研究交流の機会を生かしながら収集し、発展的課題の抽出を図る。

4. 研究成果

研究の目的に記載した有理ホモロジー球面を対象に CWL 不変量や他不変量と組み合わせで得られた成果について述べる。

(1) 予備研究を精査発展させて得られた成果の一つとして、「**ホモロジーレンズ空間の CWL 不変量的小数部分を取り出したものが、ホモロジーレンズ空間の絡み形式の同型に相当する完全不変量の集合を与えること**」である。CWL 不変量は分数で表すと分母が 12 となる有理数の値を持つ。ホモロジーレンズ空間の CWL 不変量の主要部分は、デデキント和という有理数の連分数展開から計算可能な数値である。デデキント和の性質、特に再起公式を利用して、CWL 不変量から小数部分を取り出す方法を見つけ、それがホモロジーレンズ空間を幾何的に表現する結び目によらない性質を持つことを示し利用した。論文査読者とのやり取りで、当初投稿した時点よりも上記のようにさらに到達点を伸ばすことができた。論文は "Some arithmetic of properties of the CWL invariant" (単著) として、Topology and its application, Vol 206 (2016), 115-215 として掲載された。

(2) CWL 不変量と Reidemeister torsion を組み合わせた有理ホモロジー 3 球面の研究の着想は、2007 年に Turaev の著した "Torsions of 3-dimensional manifolds" を研究したときであった。Spin-C 構造を入れた場合に、Seiberg と Witten が、1980 年代の Donaldson (ドナルドソン) を嚆矢とするゲージ理論的研究を背景として量子場理論に触発されて得たゲージ理論的な Seiberg-Witten 不変量 (1994 年) と、Reidemeister torsion + 調整 CWL 不変量が一致する という Nicolaescu の結果を知ったこと、武蔵野美術大学低次元トポロジー研究会 (2005 年開始 ~ 2014 年) で Reidemeister torsion の研究者との研究交流があったことが背景にある。このアプローチにより門上晃久 (金沢大学) と酒井健 (日本大学) で共同研究を進め、**ザイフェルト束空間でありかつ有理ホモロジー球面であるものが、結び目の手術で得られる手術係数の決定**ができた。3 本の共著を国内外の専門誌に掲載された。門上晃久、円山憲子、酒井健 "Seifert surgery on knots via Reidemeister torsion and Casson-Walker-Lescop invariant" (2015) 以降、本研究期間での成果は "Seifert surgery on knots via Reidemeister torsion and Casson-Walker-Lescop invariant II" (2016), "Seifert surgery on knots via Reidemeister torsion and Casson-Walker-Lescop invariant 同 III" (2017) である。特に II では、次の (3) の成果が利用された。

(3) 一般にレンズ空間の CWL 不変量の値の絶対値は p の 2 次式で押さえられるという評価を "A distribution of rational homology 3-spheres captured by the CWL invariants Phase 1" (単著), J. Knot Theory and its Ramification, 26 (2017) 19 頁で与えた。この成果では、有理ホモロジー 3 球面をホモロジー群の位数と CWL 不変量の値を組とする点として、平面上に分布させるもので、**有理ホモロジー 3 球面の位置や関係性を俯瞰的に視覚化**するというアイデアの提案も行った。レンズ空間の CWL 不変量の主要部分は、デデキント和に由来するものであるから、**デデキント和の絶対値の評価が鍵**となる。デデキント和は規約な正の有理数の組に定義され、実際の値は有理数の分母を固定したとき、分子の値によりギザギザとした値を取りながら振動する。そのため、カメラがズームインするように、じわじわと絶対値の上限を決めていかなければならない。この考え方で値の 上限を絞り込む有理数値関数を与えた。投稿した専門誌の査

読者に「Rasmussen が結び目の手術で得られるあるレンズ空間 3 つのクラスの Walker 不変量 (CWL 不変量の値との厳密な公式がある) の値の絶対値の評価との関係はどうか」との指摘に答えとして、Rasmussen の命題の不等式より本論文の評価の方が強いことを示した。本論文の評価式を用いると「CWL 不変量が結び目に沿った巡回手術の有限性 (即ち、手術結果の有理ホモロジー-3 球面がレンズ空間になる場合は有限であること) を捕捉している」ことが明らかになった。1980 年から 90 年代中葉までに、双曲幾何の手法などを応用した結び目手術から有限巡回群位数の得られるための手術係数は有限個で、かなり厳密に手術係数の範囲も絞りこまれていたが、CWL 不変量が粗いながらもその状況を補足していることを分布の様子 (グラフ) から視覚的に理解できた (グラフ参照)。

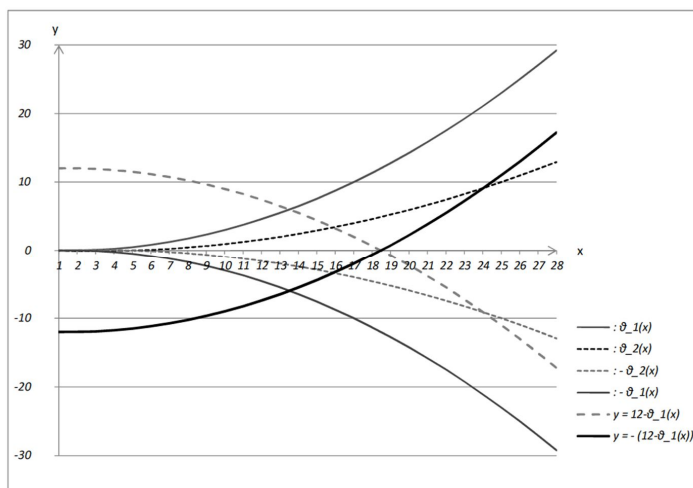
(4) “The CWL invariant and surgeries along 2-components links III” (単著、J. of Musashino Art Univ., No.49 (2018), 69-79) をまとめた。

これは、先行する 2 論文

“The CWL invariant and Surgeries Along 2-component links II” (単著 4、J. of Musashino Art Univ., No.43 (2013), 39-49) と “The CWL invariant and Surgeries along 2-component links” (単著 5、J. of Musashino Art Univ., No.42 (2012), 39-51) とでシリーズをなし、2007 年から開始した 2 成分絡み輪の手術で得られる有理ホモロジー-3 球面の CWL 不変量の多角的研究の成果である。シリーズの III では、有理ホモロジー同境を射程に入れ、2 成分絡み輪から有理ホモロジー-3 球面が有理ホモロジー的に 0 同境になる場合の CWL 不変量の式を導出した。その式により、CWL 不変量の値の実現可能性を論じ、分母が 4 となる有理数がすべてザイフェルトファイバー空間となり、かつ有理ホモロジー-0 同境な有理ホモロジー-3 球面の CWL 不変量として実現できることも示した。

(5) 1 次元ホモロジー群の位数が p のレンズ空間が有理ホモロジー的に 0 同境ならば、CWL 不変量の値の絶対値が $(p-1)/12$ という p の一次式で押さえられるという結果を “A bound for the Casson-Walker invariant of rational homology null cobordant lens spaces” (単著) Topology and Its Application 265 (2019), 106822 で示した。この評価式自体は、2014 年に着手し同年に評価に到達した予備研究で得ており、“コボルディスムと CWL 不変量について” というタイトルにより学習院大学トポロジーセミナー (2014 年 7 月) において口頭発表したものである。しかし、評価式に至る計算は効率が悪かった。本論文では、レンズ空間を定義するのに必要な有理数の連分数展開を効率のよいものにして、オイラー標数のように項の交代和を用いて求めるデデキント和の公式を導出することにより、CWL 不変量の計算と評価が簡明なものにすることができた。有理ホモロジー的な 0 同境性を CWL が不等式として捉えていることは、(4) で述べた視覚化するというアプローチの別の側面であるということができると考えられる。さらに、(3) の応用との関係から、有理ホモロジー-0 同境な有理ホモロジー-3 球面の CWL 不変量の絶対値が必ずしも上限を持つわけではないことを含意し、本研究で得られた評価式はレンズ空間特有の現象であること、(4) の巡回手術結果の有限性定理同様に、CWL 不変量の値の絶対値の評価が 2 成分絡み輪の手術で有理ホモロジー的に 0 同境のレンズ空間が得られる手術係数の有限性定理を導出することもわかった。これらの結果は、北陸結び目セミナー (2019 年 10 月開催) の講演で公表した。その際、3 次元球面と有理ホモロジー同境なレンズ空間の CWL 不変量の値の絶対値の不等式による評価が、 d -不変量の総和の絶対値の評価を導くことを指摘した。即ち、有理ホモロジー同境では、通常、 d -不変量の値が 0 になるものや一致するか否かということが問われることが多いが、申請者は注目されていない値も幾何学的な意味を持つのではないかとということを指摘した。今後の研究課題の一つである。

(6) Seiberg-Witten 不変量と Reidemeister torsion + CWL 不変量のある関係式の研究を進め、鍵となる補題さえ証明できれば完成するところまで到達した。



有理ホモロジー-3 球面の分布が捉えた巡回手術係数の有限性

結び目の手術結果の CWL 不変量は破線か太線上にあり、巡回手術結果は 4 本の放物線上か、内側の 2 本の放物線の内側になければならない。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Noriko Maruyama	4. 巻 49
2. 論文標題 The CWL invariant and surgeries along 2-components links III	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 武蔵野美術大学研究紀要	6. 最初と最後の頁 69--79
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Noriko Maruyama	4. 巻 26
2. 論文標題 A distribution of rational homology 3-spheres captured bby the CWL invariant Phase 1	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Teruhisa Kadokami, Noriko Maruyama, Tsuyoshi Sakai	4. 巻 248
2. 論文標題 Seifer surgery on knots via Reidemister torsion and Casson-Walker-Lescop invariant III	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 78-81
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Kadokami, N. Maruyama, T. Sakai	4. 巻 53
2. 論文標題 Seifert surgery on knots via Reidemister torsion and Casson-Walker-Lescop invariant II	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Osaka J. Math.	6. 最初と最後の頁 767-773
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Maruyama	4. 巻 206
2. 論文標題 Some arithmetic properties of the CWL invariant	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Top. Appl.	6. 最初と最後の頁 115-125
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 圓山憲子
2. 発表標題 A bound for the Casson-Walker invariant of rational homology null cobordant lens spaces
3. 学会等名 北陸結び目セミナー
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----