

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2016～2022

課題番号：16K05159

研究課題名（和文）結び目群間の全射準同型の存在決定と幾何的解釈に関する研究

研究課題名（英文）The existences of epimorphisms between knot groups and their geometric interpretations

研究代表者

鈴木 正明（Suzuki, Masaaki）

明治大学・総合数理学部・専任教授

研究者番号：70431616

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：円周を3次元空間に埋め込んだものを結び目という。また結び目の外部の基本群を結び目群という。ここで基本群とは始点と終点を同じにするループを考え、それが連続変形で写り合う場合は同じと見なした上でどのようなものがあるかを記述したものである。結び目群は結び目の特徴をよく表していることが知られているが、一般にはとても複雑である。そのため、それらの間の関係として全射準同型がいつ存在するかやその幾何的解釈を考察した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

結び目群は結び目をとてもよく特徴づけているが、一般に群を調べることは容易ではないことが多い。そのため、その間の全射準同型の存在という関係を調べることは意味がある。このようにそのものが単独では複雑で扱いにくいものでも、それらの関係を調べるということで研究を進めるという方法は様々な場面で応用できるものと考えられ、その点でも意義があると考えられる。

研究成果の概要（英文）：A knot is an embedded circle. The knot group of a knot is a fundamental group of the exterior of a knot. The fundamental group is the set of loops where two loops are considered as the same element if they are transformed continuously. The knot group characterizes a knot. However, it is very complicated. Then in this research, we considered whether there exists an epimorphism between knot groups and their geometric interpretations.

研究分野：位相幾何学

キーワード：結び目群 全射準同型

## 1. 研究開始当初の背景

多様体の分類や性質を考察する際に、その基本群を調べることは非常に有用な手段であり、たとえばポアンカレ予想に代表されるように、特に 3 次元多様体においてその基本群は多様体の性質を大きく反映している。3 次元球面内の結び目に対して、その補空間の基本群を結び目群と呼ぶ。結び目群は結び目の不変量になっているため、結び目群を同型によって分類することにより、結び目を分類することができる。実際、素な結び目に対しては結び目群が完全な不変量であることが、Whitten と Gordon-Luecke の結果により知られている。しかし、一般に二つの群が同型かを判定すること自体が難しい場合が多いので、この不変量を用いて結び目を分類することは容易とは限らない。このとき、結び目群が同型かが判定できなくても、二つの結び目群に対して何らかの比較や関係が決定できるのであれば、それは結び目の分類を始め、結び目の性質を調べることができ、結び目理論において非常に役に立つと思われる。

二つの結び目群の間に全射準同型が存在するときに二項関係が成立すると定義すると、この二項関係は素な結び目の集合上の半順序になることが知られている。結び目群間の全射準同型に関しては、近年活発に研究されており、たとえば Kirby の問題集には Simon 予想と呼ばれていた「それぞれの結び目群から全射準同型がある結び目は有限個か」という問題が掲載されているが、近年 Agol-Liu によって肯定的に解決された。ただし、一般にどの結び目からどの結び目に全射準同型が存在するかなど、具体的なことが分かっているわけではない。

## 2. 研究の目的

これまでの半順序の考察から、さらに研究を進めて、半順序を 11 交点以下の素な結び目の集合上で決定することを目的の一つとする。すなわち、メリディアンの条件を付加せず、全射準同型が存在するか否かを全ての 11 交点以下の素な結び目の組に対して決定する。さらにメリディアンを保たない全射準同型の幾何的解釈を考察する。

## 3. 研究の方法

メリディアンを保つ全射準同型の存在によって定まる半順序は、11 交点以下の素な結び目に対して決定されている。本研究においては、全射準同型に条件をつけずに考察し、この半順序を 10 交点以下の素な結び目の集合上で決定する。10 交点以下の素な結び目は 249 個あることが Rolfsen の本「Knots and Links」にある結び目表によって知られている。それらの二項関係であるため 61752 通りについて決定する必要がある。

二つの結び目の Alexander 多項式が割り切れなければ、いかなる全射準同型も存在しないことが知られているので、これを用いて多くの場合については全射準同型が存在しないことが分かる。残りの場合に対しては、結び目群とその表現に対して定義されるねじれ Alexander 多項式を用いたさらなる精密な検証により全射準同型の非存在を決定する。結び目群の表現としては、 $SL(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  表現を用いたが、専門図書で考察を深めながら、対称群、 $SL(3, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 、 $SL(2, F_{\{p^n\}})$  などの他の有限群への表現も検討する。この考察においては、多くの結び目群に対してその表現を計算することになるため、高性能の計算機(ワークステーション)を用いてこの研究を遂行する。

また、全射準同型が存在することの証明は、具体的に全射準同型を構成することによって証明する。結び目群は有限生成で特にメリディアンとその共役な元で生成される。よって、それらの像を決めることで写像が定まるが、ここで前年度の擬メリディアンの特徴づけを用いて、メリディアンの像を様々な擬メリディアンに決めて全射準同型の候補を考える。計算機により、その写像が群準同型かを判定し、全射準同型の探索を行う。

## 4. 研究成果

結び目群から対称群とその部分群への全射準同型を考える。全ての有限群は有限次数対称群の部分群と見なせることから、対称群はとても重要な群とすることができる。また対称群については自然表現、もしくは置換表現と呼ばれる忠実な表現がある。結び目群から対称群への全射準同型とこの表現を合成することにより、結び目群の表現を得る。この表現に付随するねじれ Alexander 多項式を使い、結び目群間に全射準同型が存在するかを考察した。実際に、結び目群から 7 次までの対称群への全射準同型を用いて全射準同型の非存在を証明できるケースが非常に多い。しかしながら、それでも証明できないケースについては、8 次対称群や 9 次対称群、さらに有限単純群への全射準同型を用いて結び目群間の全射準同型の非存在を考察した。この考

察により、10 交点以下の素な結び目については、全射準同型の存在、もしくは非存在を完全に決定することが出来た。さらに 11 交点以下の素な結び目については、2 つの組を除いて決定することが出来た。

またこれらの考察を用いて、2 橋結び目群間の中の全射準同型の個数についての公式を得ることが出来た。交点数を種数を決めるとその交点数と種数をもつ 2 橋結び目で与えられた 2 橋結び目に全射準同型が存在するような 2 橋結び目は有限個である。その個数を与える母関数を具体的に与えることが出来た。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Masaaki Suzuki	4. 巻 30
2. 論文標題 Generating functions on epimorphisms between $2$ -bridge knot groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 24
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Morita, T. Sakasai, M. Suzuki	4. 巻 11
2. 論文標題 Torelli group, Johnson kernel and invariants of homology spheres	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 379-410
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 M. Hirasawa, K. Ishikawa, M. Suzuki	4. 巻 253
2. 論文標題 Alternating knots with Alexander polynomials having unexpected zeros	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 48, 56
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Anh, Tran and Masaaki Suzuki	4. 巻 242
2. 論文標題 Genera of two-bridge knots and epimorphisms of their knot groups	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 66-72
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai, and Masaaki Suzuki	4. 巻 27
2. 論文標題 An abelian quotient of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 302-315
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mikami Hirasawa, Katsumi Ishikawa, and Masaaki Suzuki	4. 巻 253
2. 論文標題 Alternating knots with Alexander polynomials having unexpected zeros	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 48-56
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Morita, T. Sakasai, and M. Suzuki	4. 巻 B66
2. 論文標題 Symmetry of symplectic derivation Lie algebra of free Lie algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu, Geometry and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces	6. 最初と最後の頁 185-194
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masaaki Suzuki	4. 巻 17
2. 論文標題 Epimorphisms between 2-bridge knot groups and their crossing numbers	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Algebraic and Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 2413-2428
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeyuki Motta, Takuya Sakasai, and Masaaki Suzuki	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 An abelian quotient of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeyuki Motta, Takuya Sakasai, and Masaaki Suzuki	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Symmetry of symplectic derivation Lie algebras of free Lie algebras	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Goda and Masaaki Suzuki	4. 巻 56
2. 論文標題 Monodromy maps of fibered $2$ -bridge knots as elements in Automorphism of free groups	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Kyungpook Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 927-938
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fumikazu Nagasato, Masaaki Suzuki, and Anh Tran	4. 巻 28
2. 論文標題 On minimality of two-bridge knots	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 11 pages
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Masaaki Suzuki	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Epimorphisms between $S^2$ -bridge knot groups and their crossing numbers	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Algebraic and Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計16件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Knot group, symmetric group, dihedral group, and twisted Alexander polynomial
3. 学会等名 East Asian Conference on Geometric Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Epimorphisms between knot groups and twisted Alexander polynomial
3. 学会等名 Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Epimorphisms between two-bridge knot groups - crossing number, genus
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 On a structure of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra
3. 学会等名 Teichmuller Theory: Classical, Higher, Super and Quantum (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Generating function on epimorphisms between 2-bridge knot groups
3. 学会等名 East Asian Conference on Geometric Topology 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Epimorphisms between knot groups
3. 学会等名 SFB Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Computations of Johnson homomorphisms
3. 学会等名 New Trends in Teichmuller Theory and Mapping Class Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Genera of two-bridge knots and epimorphisms of their knot groups
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Genera of two-bridge knots and epimorphisms of their knot groups
3. 学会等名 東北結び目セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Two filtrations of the Torelli group
3. 学会等名 Topology and Computer 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Two filtrations of the Torelli group
3. 学会等名 East Asian Conference on Geometric Topology 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Epimorphisms between knot groups - crossing number, genus
3. 学会等名 East Asian School of Knots and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Epimorphisms between knot groups
3. 学会等名 International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Epimorphisms between knot groups
3. 学会等名 Geometry Seminar (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Epimorphisms between two-bridge knot groups and their crossing numbers
3. 学会等名 Fundamental Groups, Representations and Geometric Structures in 3-Manifold Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Epimorphisms between knot groups
3. 学会等名 Seminar Geometry, Topology, Dynamical Systems (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関