

令和 6 年 6 月 12 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2023

課題番号：16K05160

研究課題名(和文)次元論および距離空間の埋蔵問題から考察するcoarse幾何学の研究

研究課題名(英文)Dimension theory and coarse geometry from the view point of embedding problems

研究代表者

小山 晃 (Koyama, Akira)

早稲田大学・理工学術院・名誉教授

研究者番号：40116158

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：測地線空間の理想境界の位相的性質を次の視点から調べた。一つは境界の局所的ホモロジー群が自明な境界全体の位相的性質、もう一方は位相的に具合の良い性質が全く期待できない場合の観点の開発であった。

前者は、局所的にホモロジー群が自明になるならばANRと類似した性質をもつと考え、V. Valov (Nipissing University, Canada)との共同研究の結果を学術誌 Topology and its Applicationsに発表した。

後者は、コホモロジー次元が鍵になると考え、その経過をRIMS共同研究「一般トポロジーとその関連分野の進捗」(2023年6月5-7日)で報告した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

M. Gromovが幾何学的群論の新しい攻略法として提唱したcoarse幾何学では測地線空間の理想境界の位相的性質を調べることが重要になる。特に幾何的に解明可能が難しい場合の研究はそれほど進んでいない。本研究はそのような場合に有効と考えられるコホモロジー次元論からの研究とホモロジー論的なANR理論の開発を提唱した。現段階ではブレイクスルーを与えるまでに至っていないが、取りかかりとしては着実な進歩を与えた。

研究成果の概要(英文)：We investigated topological properties of ideal boundaries of geodesic spaces from the following two points of view. The first case is that the local homology groups of the boundary is trivial. The second case is that the boundary has pathological complexity.

In the first case we suppose that the boundary should have similar properties to ANR. Related to this topics I published the joined paper with professor V. Valov (Nipissing University, Canada) from Topology and its Applications.

In the second case we suppose that cohomological dimension theory should be a key tool. Then we analyzed the classical example by Boltyanski and Kodama and succeeded to simplify the construction. We presented its process at the meeting at RIMS Institute for Mathematical Sciences Kyoto University, 2023, 06, 05 -07.

研究分野：位相幾何学

キーワード：次元論 コホモロジー次元論 coarse幾何学 漸近次元

## 1. 研究開始当初の背景

Asymptotic 幾何学は、主に M. Gromov の研究活動からその重要性が認識され、離散群の研究や基本群に随伴する多様体の不変量を研究する手法の一つとなっている。Coarse 幾何学は、asymptotic 幾何学の考え方の本質を、Higson-E.K.Pedersen-J.Roe(K-Theory, 11(1997), 330–354) が指摘して以来、(有界ではない)距離空間、例えば、完備な開リーマン多様体やより一般化され CAT(0)空間、を対象とする large scale 幾何学として体系化されてきた。

一方、従来のトポロジー研究では局所的な性質を調べることから出発し、パラコンパクト性などを用いて空間全体の性質をとらえる考え方であった。例えば、(位相)次元論や ANR 理論はその考え方に沿っている。ところが、無限遠での極限も点と見なすことで従来の small scale の見方が展開できるので従来の研究成果を融合していこうと試みがなされている。例えば、多様体の基本群としての離散群の不変量として Gromov が導入した asymptotic 次元は好例である。さらに、G. Yu (Ann. of Math.147(2)(1998),325–355)が、「Novikov higher signature 予想は、その基本群  $\pi_1(M) = \Gamma$  について、 $\text{asdim } \Gamma < \infty$ である多様体  $M$  について成り立つ」を示したことにより応用が確保され、J. Roe, A.N. Dranishnikov, M. Bestvina, S. Buyalo ら多くの研究者が large scale 幾何学や離散群の研究を次元をキーワードとして参集してきた。

## 2. 研究の目的

Coarse 幾何学に現れる理想境界のトポロジーをキーワード「次元」をもって研究する。方向は次の二つを考えている。

- (1) 非常に病理的な複雑さをもつ理想境界が現れる可能性がある。その場合、small scale トポロジーで研究しているコホモロジー次元論を用いて asymptotic 次元の評価する。
- (2) (1)とは逆にある程度ゆるやかな複雑さをもつならばそのトポロジーはどの程度良い性質をもつか局所的なホモロジー群の自明性で評価できるか？

そのために coarse 幾何学だけでなく、small scale の幾何学 (= 従来の幾何学)でのコホモロジー次元論や ANR 理論の研究を進展させる。

## 3. 研究の方法

今回提案したプロジェクトは、前述のように理想境界のトポロジーをキーワード「次元」をもって研究することであった。それは coarse 幾何学の研究と同時に従来の次元論もブラッシュアップさせ、coarse 幾何学の研究にフィットするものに転換させることでもあった。

初年度は研究方向を明確にすることに特化し、様々な方向から研究を行った。その結果、これまでも定期的にワークショップ型の研究集会を開いてきたが改めて本プロジェクトに即したキックオフミーティング「第 10 回早稲田幾何学的トポロジーミーティング」(2027 年 3 月 13 日 - 16 日)を開催した。研究協力者 Jerzy Dydak 教授 (University of Tennessee, U.S.A.)を主講演者として、coarse 幾何学の survey lectures(90 分 2 回)を行った。また、本ミーティングに野生的空間の基本群について第一人者である江田勝哉教授 (早稲田大学名誉教授)及び Greg Conner 教授 (Brigham Young University, U.S.A.)を招き、理想境界に現れる可能性のある病理的な空間のホモトピー論について講演をしてもらった。この集会により本プロジェクトの方向付けが定まった。プログラムは以下の通りである：

3 月 13 日 (月)

13:30 -- 15:00 Jerzy Dydak (University of Tennessee, U.S.A.)

Variant decomposition complexity in coarse geometry

15:20 -- 16:00 小山晃 (早稲田大学)

Algebraic ANR and local connectivity

16:15 -- 17:00 今村隼人 (早稲田大学)

Stability theorem for multivalued inverse limits

3 月 14 日 (火)

10:30 -- 11:20 知念直紹 (防衛大学校)

Inverse limits of finite topological spaces

11:30 -- 12:20 山内貴光 (愛媛大学)

On infinite-dimensional properties for coarse spaces

13:30 -- 15:00 Greg Conner (Brigham Young University, U.S.A.)

Locally complicated spaces

15:20 -- 16:00 江田勝哉 (早稲田大学名誉教授)

Fundamental groups of Peano continua

16:15 -- 17:00 佐藤尚倫 (早稲田大学)

Geometric description of Schreier graphs of B-S groups

3月15日(水)

10:30 -- 12:00 Jerzy Dydak (University of Tennessee, U.S.A.)

Introduction to coarse geometry

13:30 -- 14:30 石上知 (早稲田大学)

Finitely dominated CW-complexes and Mather's theorem

15:00 -- 15:50 鈴木康央 (早稲田大学)

Persistence homology and its applications

16:00 -- 16:50 Problem session

3月16日(木)

10:30 -- 12:00 Jerzy Dydak (University of Tennessee, U.S.A.)

Introduction to coarse geometry

出席者: Greg Conner, Jerzy Dydak, 江田勝哉, 知念直紹, 山内貴光, 鈴木康央, 今村隼人, 佐藤尚倫, D. Shakhmatov (愛媛大学), 薄葉季路 (早稲田大学), 川尻雄輔 (早稲田大学), Cheng Zheng (早稲田大学), Alex Shummay (Brigham Young University)

2017, 2018 年度は上記研究目的(2)について, Vesko Valov 教授 (Nipissing University, Canada) との国際共同研究を開始し, 主に e-mail を用いて情報交換を行った. これらについては適宜研究集会(下記研究成果の項を参照)で報告することにより, 情報交換と助言を得ることに努めた.

2019 年度(本来ならば最終年度に向けての準備年)は, 理想境界のトポロジー研究に力学系理論を取り込むために, 前期は加藤久男氏(筑波大学名誉教授), 後期は J. R. Sanjurjo 教授 (Universidad Complutense de Madrid, Spain) による集中講義を行った.

2020 年度からはコロナ渦により対面による意見交換や研究会の開催は困難になった. 個人的には 1 年目は本来業務の授業関係をこなすことに忙殺されたが, 慣れてからはオンラインによる情報収集やセミナーによって研究活動を維持した. 2020 年で特筆することは, Michael Levin 教授 (Ben-Gurion University, Israel) による 10 回に及ぶオンライン講演を行ったことをあげる. また, 2021 年度から Jerzy Dydak 教授とのオンラインによる意見交換や Warsaw 大学が企画する topology seminar などが始まり, 一定度のレベルの研究活動ができた.

2022 年度から徐々に通常の研究活動に戻り, 下記の成果方向につながった.

#### 4. 研究成果

(1) に関連して, 理想境界に複雑な図形が現れる proper 距離空間を構成するために, 次元論で知られている Boltyanskii-Kodama 型のコンパクト距離空間, すなわち,  $\dim X^2 = 2 \dim X - 1$  であるコンパクト距離空間  $X$  の構成法の本質を解析した. これにより構成が大きく単純化された. 結果として Boltyanskii-Kodama 型のコンパクト距離空間が理想境界として実現される可能性が大きくなった. この過程は,

研究集会「一般トポロジーとその関連分野の進捗」(京都大学数理解析研究所, 2023 年 6 月 5 日(月) ~ 6 月 7 日)

で発表し, その講究録に詳細を掲載した.

(2) に関連して, 有限次元コンパクト距離空間が ANR であることはホモトピーに関する局所自明性で特徴付けられることが知られている. しかし, 理想境界の構造はもとの proper 距離空間からの極限として与えられるので(局所的でも)ホモトピー群の自明性を示すことは難しい. そこで, ホモロジー群ならば計算可能なのではと考え, 局所的に

ホモロジー群が自明になるコンパクト距離空間を特徴付けることを考えた。この経過は Vesko Valov 教授 (Nipissing University, Canada) との国際共同研究としてまとめ、  
On homologically locally connected spaces, *Topology and its Applications*,  
260(2019), 57–69.

に発表した。この結果に関して、ホモトピーによる局所自明性とホモロジーによる局所自明性の差を明確にする共同研究を継続している。途中経過は、

Homological properties of decomposition spaces

にまとめて順次国際会議

- Geometric Topology and Geometry of Banach Spaces, Ben-Gurion University of Nedeve, Israel, 2017, 05, 14–19.
- The 2<sup>nd</sup> Pan Pacific International conference on Topology and its Applications, Pusan, Korea, 2017, 11, 13–19.
- Geometric Topology - Celebration the year of Mathematics in Poland, the Institute of Mathematics, Warsaw, Poland, 2019, 08, 09–14.

で発表している。また、これらをまとめた総合報告を

- Geometric Topology and Related Topics - Dedicated to the 65<sup>th</sup> birthday of Sergey Antonyan, Mazatlan, Mexico, 2019, 09–12

で行った。

申請の段階で最終年度に成果報告を兼ねたワークショップを開催することをあげた。コロナ渦で延び延びになったが、本科研費の援助の下、早稲田大学西早稲田キャンパスにおいて、「2024 早稲田幾何学的トポロジー研究集会」(2024 年 3 月 6 日 – 7 日)を開催した。J. Dydak を招聘する予定であったが当人の家庭の事情でオンラインによる参加となった。プログラムは以下の通りである：

3月6日(水)

13:00 -- 14:00 山内貴光 (愛媛大学)

On a characterization of equivariant asymptotic dimension

14:10 -- 15:10 知念直紹 (防衛大学校)

Equivariant asymptotic dimension and locally finite groups

15:30 -- 16:30 Michael Levin (Ben-Gurion University at Nedeve)

Equivariant maps and mean dimension

3月7日(木)

10:00 -- 11:00 Jerzy Dydak (University of Tennessee, U.S.A.)

Boundaries for geodesic spaces

11:10 -- 12:00 佐藤尚倫 (九州産業大学)

Stabilizers in Higman-Thompson groups  $\mathcal{F}(p)$

13:00 -- 14:00 矢ヶ崎達彦 (京都工芸繊維大学)

Boundedness of bundle diffeomorphism groups over a circle

出席者：Jerzy Dydak, Michael Levin, 江田勝哉 (早稲田大学名誉教授), 加藤久男 (筑波大学名誉教授), 矢ヶ崎達彦 (京都工芸繊維大), 山内貴光 (愛媛大学), 知念直紹 (防衛大学校), 嶺幸太郎 (神奈川大学), 越野克久 (神奈川大学), 酒井政美 (神奈川大学), 薄葉季路 (早稲田大学), 佐藤尚倫 (九州産業大学), 松家拓稔 (東京都立大学), 青山昂頌 (大阪大学)

小さな会であったが、若手研究者も参加し、Coarse 幾何学, asymptotic 次元, 幾何学的群論と多岐にわたる最新の結果を網羅することができ、非常に有意義な集会であった。また、M. Levin による講演は力学系の平均次元に関わる最新の結果であり、参加者に強い印象を与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Akira Koyama and Vesko Valov	4. 巻 260
2. 論文標題 On homologically locally connected spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 57--69
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topolo.2019.03.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 小山 晃	4. 巻 2271
2. 論文標題 Boltyanski i-Kodamaの例と関連する話題について	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 97--108
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 5件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Akira Koyama
2. 発表標題 Algebraic ANR and related topics
3. 学会等名 Geometric Topology - Celebrating the Year of Mathematics in Poland（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akira Koyama
2. 発表標題 Algebraic ANR revised
3. 学会等名 Conference on Geometric Topology and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 小山 晃
2. 発表標題 Homological properties of decomposition spaces
3. 学会等名 Building-up Differentiable Homotopy Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akira Koyama
2. 発表標題 Homological properties of decomposition spaces
3. 学会等名 Geometric Topology and Geometry of Banach Spaces, Eilat, Israel (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Akira Koyama
2. 発表標題 Homological properties of decomposition spaces
3. 学会等名 The 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, Pusan, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小山 晃
2. 発表標題 Boltyanskii-Kodamaの例と関連する話題について
3. 学会等名 一般トポロジーとその関連分野の進捗
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 小山晃	4. 発行年 2021年
2. 出版社 森北出版	5. 総ページ数 288
3. 書名 位相空間論	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ディダック イエジー (Dydak Jerzy)	テネシー大学・Department of Mathematics・Professor	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 The 10th Waseda Geometric Topology Seminar	開催年 2017年～2017年
国際研究集会 2024 Waseda Geometric Topology Meeting	開催年 2024年～2024年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イスラエル	Ben Grion University			
カナダ	Nippising University			
米国	Univerisity of Tennessee			
ポーランド	the Institute of Mathematics			