様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　　５ 月 ２９ 日現在

機関番号：１２３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ０５１６８

研究課題名（和文）数域半径による作用素環上の写像分解の研究

研究課題名（英文）Decomposition of Maps on Operator Algebras with Numerical Radius

研究代表者
伊藤　隆（ITOH, TAKASHI）

群馬大学・教育学部・教授

研究者番号：４０１９３４９５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）：『拡張した数域半径を用いた作用素分解問題』が、コンヌによる有限型因子の埋め込み問題と同値であることが示されたことにアイデアを得、与えられた作用素環の中の作用素として実現できるかが、鍵となることを突き止めた。
　自由群から生成されるC*-環からその双対への完全有界作用素の分解問題としてアプローチした。分解は可能であり、そこに現れる作用素が、自由群から生成されるC*-環の元として取り直すことが出来れば、コンヌによる有限型因子の埋め込み問題の解決も得られることを得た。しかしながら、現時点では、フォンノイマン環の元として取り直す段階に留まっている。

研究成果の学術的意義や社会的意義
バナッハ空間論において古典的な問題であるヒルベルト空間を経由する分解問題が、２つのヒルベルト空間を経由する分解問題として作用素環論の研究の中に現われ、数域半径が、新たな視点を与えることが、明確になってきた。この問題を作用素環論の研究に端を発した作用素空間の視点から捉え直すことを目的とした新しい方向性をもつ研究である。Connesのopen problem に対するアプローチは多様であるが、数域半径と分解問題としてとらえたことに斬新さを有する。

研究成果の概要（英文）：　Inspired the equivalence between the factoring problem of operators using the extended numerical radius and the embedding problem of finite factors posed by Connes, we have reached to the key if the factored operator can be replaced by the operator inside the given operator algebra.
　We approached the goal as the factoring problem of the completely bounded map from a C*-algebra generated by the free group to its dual space. It was possible to factor the map. If the map shown up can be factored, the longstanding above problem will be settled down. However we can show that the operator is in a von- Neuman algebra at present.

研究分野：作用素環

キーワード：数域半径　完全有界写像　作用素環　ヒルベルト空間　作用素空間

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

Hilbert 空間を経由する作用素の研究は、1956 年、Grothendieck によって始まった。X と Y を Banach 空間とし、T を X から Y の双対空間への有界線形写像とする。Grothendieck は T が、ある Hilbert 空間 K を経由して分解できるための必要十分条件を、
X と Y のテンソル積上のノルムを用いて特徴づけた。Grothendieck の定理は、十年あまり後 Lindenstrauss-Pelczynski によって、再発見され、その重要性が強調されると共に（古典的な）Banach 空間論の発展を推進した。

作用素環論においても　1985 年 Haagerup によって非可換 Grothendieck の不等式が証明され、C*-環 A から C*-環 B の dual B*への全ての有界線形作用素は、Hilbert 空間 H を経由して分解できることが分かった。また９０年代に入り、作用素空間（後述）が整備され、Haagerup ノルムの重要性が認知される中で、A から B*への完全有界写像(行列環をテンソルしても一様有界である写像）が、column-Hilbert 空間 Hc := B(C, H) を経由して分解されるための必要十分条件が示された。そして 2007 年、Effros-Ruan 予想が、Haagerup と Musat によって解決され、最大作用素空間射影ノルムを用い、完全有界写像 T は全て Hc と row-Hilbert 空間 Hr := B(H, C) の直和を経由して分解されることが示された。ここで Hc は Hr と Hilbert 空間として同型であるが作用素空間としては同型ではない。

上記の分解はすべて、１つの Hilbert 空間を経由した分解であるが、1963 年の Ando による有名な数域半径の特徴づけ定理を用いた 1990 年の Ando-Okubo による（有限次）行列の Schur Multiplier に関する研究の中で、自然な形で２つの Hirbert 空間を経由する分解が与えられた。有限次元であることの制約を長い間外すことが出来なかったが 2006 年 Itoh-Nagisa が解決した。

さらに、Ferenick, Kavruk, Paulsen により、拡張した数域半径による上記 Ando の定理に現れる分解が、Itoh-Nagisa による分解と同じものであること、そして「分解に現れる作用素が自由群から生成される C*-環 C* (F2)の元に取り直すことができること」と　Connes の「 II 1 型因子環の埋蔵問題」が同値であることが示された。これは、数域半径を用いた Schur Multiplier 型の分解に現れる作用素の研究に強い motivation を与えている。数域半径作用素空間（後述）における作用素分解に焦点をあて、この問題にアプローチすることとした。

２．研究の目的

Banach 空間における ”古典的な ”『Hilbert 空間を経由する有界線形作用素の分解問題』を（拡張した）数域半径を軸とする作用素空間の視点からとらえ直し、Schur Multiplier に対応する新たな作用素の分解問題を解決すること、具体的には、『作用素空間上の Pisier によって導入された(２つの) 作用素空間的 Hilbert 空間 OH を経由する作用素の特徴づけ』を得ることを目的とした。さらに、Paulsen らによって提出された『拡張した数域半径を用いた作用素分解問題』の解決を目指すことを目標とした研究である。

３．研究の方法

まず一般の Banach 空間 X から X*への写像 T がいつ分解するかを試みたが、古典的な 2-summing ノルム の有界性を仮定しなければならなかった。そこで 2-summing ノルムを通常のノルムに修正した分解定理を得ることを目標とした。さらに X を作用素空間、T を完全有界写像としたときの分解定理も視野に入れ、作用素空間的 Hilbert 空間 OH （Hc と Hr の補間空間）を２つ経由する分解を考察し、分解に現れた作用素が、どの生成環に属するか判定することとした。X を具体的な ℓp や Lp 空間とすると　作用素 T : Lp ->Lq に対する新たな分解定理を得ることになる。p = 2 としても T の分解において最小のノルムを与える作用素と T との関係は、作用素論的にも興味深い対象となる。また、作用素空間の視点で、Hilbert 空間 H を Hc、Hr または OH と取り換えることによりそれぞれ古典的な作用素論には現れない新たな作用素の分解定理を得ることになる。　そして、有界線形作用素 T の分解を用いた数域半径 w(T) の次の新しい特徴づけ定理(Itoh-Nagisa, ICM2014 Satellite Conference にて発表) が、数域半径作用素空間を用いて強力な応用を持つことが、わかってきた。つまり、与えられた C* (F2) 上の作用素 T の数域半径 w(T) を用いた分解に現われる作用素を C* (F2)の中で取り直すことが、Connes の「 II 1 型因子環の埋蔵問題」を解決する鍵であることが明確になった。本研究は、ノルムではなく数域半径を用いた作用素の分解に立脚した研究であり、作用素環論の未解決問題にも寄与する極めて意義のある設定である。

1988 年、Z.J.Ruan : Subspaces of C*-algebras, J.Funct.Anal. 76 によって導入された作用素空間の概念は、作用素環論のみならず、関数解析学全般にわたる新しい視点を与えた。
(抽象的) 作用素空間 X とは、任意の自然数 n に対し、二つの条件 OI, OII を満たす Mn(X) 上のノルム On( ) を有する複素ベクトル空間である。B(H) の部分空間 Y （これを具体的作用素空間と呼ぶ）は、明らかに Ruan の公理を満たす.　Ruan は、次を示した。
定理(Ruan, 1988) X が作用素空間ならば、X から B(H) の中への完全有界線形写像で完全等距離なものが存在する。

これに対し、Itoh-Nagisa は、数域半径作用素空間（OII の代わりに少し弱めた条件 WII を満たすノルム Wn( ) を有する複素ベクトル空間）を導入し、次を得た。
1) X が数域半径作用素空間ならば、X から B(H) の中への完全有界写像で完全等距離なものが存在する。
2) X が作用素空間ならば、無限個の異なる数域半径作用素空間への埋め込みを持つ。
つまり、作用素空間の背後にある多様な数域半径作用素空間の存在を示したことになる。
その後、数域半径作用素空間に関しては、Ferenick, Kavruk, Paulsen(2013) により、数域半径を用いた（Connes の問題へアプローチする）分解が、Itoh-Nagisa による分解と同じものであることが発見されるまで、際立った進展はなかった。　そして上記研究の中の最大数域半径が、作用素の分解によって表示できることから、数域半径と Connes の未解決問題が、密接に関わっていることがわかってきた。

４．研究成果

上記分解に現れた[2-summing ノルムを作用素ノルムでの評価の分解]、[Pelcznski type の条件]、[Haagerup type のテンソル積の条件] の３つを考察した。さらに同時に作用素論的アプローチとして OH が自然に現れるファンクターを考察した。
2008 年　Haagerup Musat [The Effros-Ruan conjecture for bilinear forms on C*-algebras, Invent.Math., 174, 139-163,(2008)] は Effros-Ruan 予想(1988 年）の解決の中で Grothendieck　type の完全有界写像に関する不等式を提出した。
この不等式は、Itoh-Nagisaによって導入されたC*-環A のテンソル積上の数域半径Haagerup ノルムと強い関連をもつ。作用素空間と数域半径作用素空間の違いも dual の言葉で表現すれば、有界性をコントロールする状態が数域半径作用素空間では１つ（作用素空間では２つ必要）で制御できる点があげられる。背景に一般化された Khinchine の不等式があるのだが、模糊とした部分も多くこのテンソル積の dual の視点からの考察の必要性が明確になった。
これまで、Mn(X*) には、それぞれの目的から異なる 4 通りの方法（[Lance, 1976]、[Christensen-Sinclair 1987]、[Itoh, Blecher 1988]、[Effros-Ruan 1991]）、が考察されてきている。Schur 積を用いた考察として、完全有界写像の意味が異なってくるが、Rajpal, Kumar, Itoh の論文の中でこのクラスの写像が初めて導入された。新たな分解定理をこのクラスの写像に関し考察することも、今後の研究の方向性として必要であることが分かった。
結果的に多くの未解決問題を提出する研究となった。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　0 件）

〔学会発表〕（計　　2 件）

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名： 渚勝
ローマ字氏名： Nagisa Masaru

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。