

令和 2 年 9 月 11 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05171

研究課題名(和文)量子スピン系の基底状態の研究

研究課題名(英文)Research on ground states of quantum spin systems

研究代表者

緒方 芳子(Ogata, Yoshiko)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：80507955

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：1次元量子スピンのSPT(symmetry protected topological)相の分類について研究を行った.on-site,あるいはreflection symmetry についてのSPT相のindexを定義し,それが「スペクトルギャップと対称性を保ったまま移りあえる」という基準による分類について不変量であることを一般の設定で数学的に厳密に示した.これらが完全不変量であるかは未解決であるが,関連した状態の分類について,これらは不変量であることを示した.無限系で上のような分類を考える際に重要な手段としてautomorphic equivalenceというものがあるが,この無限版を示した

研究成果の学術的意義や社会的意義

SPT 相という物理相の分類問題が近年注目されている.これは,何らかの決められた対称性を持ち,ハミルトニアンにスペクトルにギャップを持つような系の分類問題である.スペクトルギャップのあるモデルというのはある意味正規な状態を見ることができるため,二つのモデルが同値というのは,それらが臨界現象を経験することなく移り合うことができるということで,物理的に自然な分類問題となっておりその数学的研究は学術的に意義深い.また,量子コンピューターを実現する系として,実用上も注目を集める課題である.

研究成果の概要(英文)：We introduced indices of SPT(symmetry protected topological) of quantum spin chains, for on-site and reflection symmetries. We proved rigorously that the indices are invariant of the classification of SPT phases.It is still open if it is a complete invariant, but we showed that it is a complete invariant of some related classification of states. We also showed automorphic equivalence, an important tool for such analysis, for infinite systems.

研究分野：数理物理学

キーワード：SPT相 量子スピン系

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

近年、スペクトルギャップを持つハミルトニアン分類問題は理論的及び応用上の観点から様々な物理系において注目をあつめている。その多くの解析は、数学的に厳密でなかったり、あるいは厳密であっても、特殊なモデルについての解析となっていたりしていることが多い。特に primitivity と呼ばれる比較的強い仮定を課した Matrix product state (MPS) を用いた解析が広く行われていた。研究開始時期までに私はこの primitivity という条件を緩めた系を考え、その特徴づけを行った。

### 2. 研究の目的

本研究では量子スピン系という数理モデルにおいて分類問題を数学的に厳密に、かつ出来るだけ一般的な設定で解析することを目的とした。量子スピン系は行列環の無限テンソル積として与えられる  $C^*$ -環である。この  $C^*$ -環の各元が大体局所的な物理量を表している。量子スピン系におけるモデルは、相互作用という  $Z$  の有限部分集合から量子スピン系への局所性、自己共役性を満たした写像により定められる。相互作用が適切な局所性を満たすというのが物理の要請である。このような相互作用を基に量子スピン系における時間発展が定義できる。こうして与えられた時間発展に対して、基底状態というある種の条件を満たす状態を考えることができる。これは物理的には絶対零度での状態に対応する。これに対して「基底状態でスペクトルギャップが開いている」という条件を満たす物理モデル全体  $S$  が本研究の研究対象である。このような物理モデル全体に対して、次のような同値関係を考える。二つの物理モデルは、 $S$  内の適切な意味での滑らかな路により繋がっている時に、二つの状態は等価であるとする。 $S$  内のモデルは、ある意味正規な状態を見ることができると、二つのモデルが同値というのは、それらが臨界現象を経験することなく移り合うことができるということで、物理的に自然な分類問題となっている。この分類を出来るだけ一般に行いたいというのが本研究の目的である。

さらに上の分類に対称性を入れて考えることもできる。これは Symmetry protected topological phase (SPT 相) の分類と呼ばれ、物理と広い数理物理学の分野で色々な観点から研究されている。この分類は次のようなものである。ある群  $G$  が量子スピン系に作用しているとする。相互作用がこの群作用について不変であるような物理モデルで、基底状態でスペクトルギャップが開いているもの全体を  $T$  と書くことにしよう。このような物理モデル全体に対して、次のような同値関係を考える。二つの物理モデルは、 $T$  内の適切な意味での滑らかな路により繋がっている時に、二つの状態は等価であるとする。これが SPT 相の分類問題である。二つの  $T$  内の物理モデルに対して、それらは  $S$  内の路では繋がれるが、 $T$  内では繋がれない、すなわち路上で対称性を課した場合はつなげることができないという状況が起こりうる。この SPT 相の分類も本研究での目的である。

### 3. 研究の方法

研究には、作用素環をはじめとする数学及び量子統計力学で培われてきたテクニックを用いた。

### 4. 研究成果

- (1) 私自身が導入した、primitivity という条件を緩めた Matrix product state (MPS) のクラスについて本研究ではこのクラスの物理モデルの完全分類を行った。その結果このモデルは並進対称

性を崩さずに全てつなげることができるということがわかった。これは一次元量子スピン系で対称性を考えない場合に物理的に予想される結果と一致している。

- (2) Lieb-Schultz-Mattis type theorem というのは、ある種の条件のもと、「基底状態でスペクトルギャップが開いている」という状況は起こり得ない、という本研究テーマと深く関わる定理である。これまで、連続群についてはLieb-Schultz-Mattisをはじめとする数学的に厳密な結果が古くから知られていた。一方有限群については、物理の論文で、MPSによる解析が知られていたが、数学的に一般の設定では知られていなかった。田崎晴明氏との共同研究で、一次元量子スピン系についてこれを行った。さらにその後の田崎氏と立川氏との共同研究で新たな手法により新しい同種の結果を得た。(プレプリント)
- (3) On-site の有限群による対称性、及び reflection 対称性について、一次元量子スピン系 SPT 相の研究を行った。このような問題を考えるときに数学的に自然なアプローチは、何らかの index を定め、それが不変量であることを示す、というものだ。実際 MPS を元にした解析で ある index が提唱された。問題は、全ての系が MPS ではないため、これが部分的にしか定義されていない index であるということだった。全体で定義されていないため、それが不変量であるかという問題は意味をなさない。本研究ではまず一般の SPT 相について定義できる index を定め、さらにそれが実際に不変量であることを数学的に厳密に示した。解析には、作用素環論で研究されていた split property という性質と、量子統計力学で Hastings により導入された automorphic equivalence を用いた。
- (4) (3) で用いた automorphic equivalence はもともと有限系で導入されたもので、無限系の話にするには熱力学極限を取るという操作を行っていた。これは理論的にはあまり嬉しくない状況であったため、直接無限系について automorphic equivalence を示すことを行った。有限系での証明は有限次元性をあからさまに用いた無限系では通用しない証明となっていたため、証明には根本的に新しいアイデアを用いた。その際、Lieb-Robinson bound と呼ばれる時間発展の局所性の評価を繰り返し用いた。これは UC Davis の学生である Alvin Moon 氏との国際共同研究である。
- (5) (3) で示したのは、定義した index が不変量であるということであった。完全不変量であるかは未解決である。しかし、この量は、基底状態が「エンタングルメントが小さく対称性が破れていない」という条件を保つ変換で移り合うか否か、という分類の完全不変量になっていることは示した。具体的には、split property という性質を持たず純粋状態で、与えられた対称性を満たすものの分類を考えた。量子スピン系上の純粋状態の homogeneity というのは古く Powers の時代から知られているが、その後多くの技術面での進歩があり、特にこの論文では、Kishimoto-Ozawa-Sakai による一般の設定での証明技術を利用した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ogata Tasaki	4. 巻 1432-0916
2. 論文標題 Lieb Schultz Mattis Type Theorems for Quantum Spin Chains Without Continuous Symmetry	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1--22
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1007/s00220-019-03343-5">https://doi.org/10.1007/s00220-019-03343-5</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshiko Ogata	4. 巻 352
2. 論文標題 A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization III	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Comm. Math. Phys	6. 最初と最後の頁 1205-1263
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） s00220-016-2810-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshiko Ogata	4. 巻 338
2. 論文標題 A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization I	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Comm. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 1011-1042
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-016-2696-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshiko Ogata	4. 巻 348
2. 論文標題 A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization II	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Comm. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 847-895
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-016-2697-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshiko Ogata	4. 巻 352
2. 論文標題 A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization III	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Comm. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 1205-1263
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-016-2810-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization III
3. 学会等名 Operator algebras and Quantum Information Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 Classification of gapped Hamiltonians in quantum spin chains
3. 学会等名 MSJ-SI Operator Algebras and Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Yoshiko Ogata
2. 発表標題 A class of asymmetric gapped Hamiltonians on quantum spin chains and its characterization
3. 学会等名 QMath13 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----