

令和元年6月24日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05172

研究課題名(和文)バナッハ環上の保存問題とジャイロ構造の研究

研究課題名(英文)Study on preserver problems on Banach algebras and gyro-structure

研究代表者

羽鳥 理 (Hatori, Osamu)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：70156363

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：単位的 C^* 環のある種の部分構造が一般ジャイロ構造を満たすことを示し、ユニタリー不変ノルムにかかわる等距離写像を決定した。1970年代からの懸案であり、不十分な結果のみが知られていたリップシッツ環に対するRao-Royの予想を肯定的に含む結果の証明に成功しRao-Royの予想を最終的に解決した。リップシッツ環や連続微分可能関数からなる空間上の各種ノルムに対する等距離写像を研究し、多くの場合にその形を決定した。関数環と C^* 環のテンソル積においてエルミート写像を調べ、それをを用いて等距離写像を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

等距離写像は1932年のバナッハの研究以来盛んに研究されてきた。各種のバナッハ環やバナッハ空間の間の等距離写像が決定される中で、バナッハ環の等距離写像の研究において、リップシッツ環に対するRao-Royの予想の解決は40年以上の長年の課題であった。これを肯定的に解決できたことは、今後のこの分野の発展に大きく寄与すると期待できる。ジャイロ構造の研究はそれ自身でも興味がある対象であるが、それをを用いた等距離写像の研究が進化したことはこの分野で特筆される。バナッハ空間のテンソル積の間の等距離写像の研究はまだ未開拓の部分も多く、今後の発展が期待されている。

研究成果の概要(英文)：We prove a certain substructure of a unital C^* -algebra has a generalized gyro structure. Applying it, we exhibit the form of surjective isometries. We studied the old conjecture of Rao and Roy in 70's on isometries on Banach algebras of Lipschitz maps on compact metric spaces. Finally we succeeded to prove a result which contains the conjecture. We studied isometries on the space of Lipschitz maps and the space of continuously differentiable maps. We exhibit the form of surjective isometries on these spaces with respect several type of norms. We showed the form of Hermitian operators on a Banach space of the tensor product of a function algebra and C^* -algebras. Applying it we exhibit the form of surjective isometries on such Banach spaces.

研究分野：関数解析学

キーワード：等距離写像 ジャイロ空間 バナッハ環 リップシッツ環

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

バナッハ環の間の写像が与えられた構造を保存するときに、その写像は他のどのような構造や或いは集合を保存するかを問う問題や、さらにそのような写像の一般形を決定する問題を保存問題という。Banach-Stone の定理とその非可換化である Kadison の定理はバナッハ環上の等距離写像についての最も基本的な定理であり、本研究の原点である。線形性を仮定しない写像についての保存問題の研究も古くから行われていて、この 20 年ぐらいの間に広く研究されるようになった。線形写像に対する保存問題の研究に比して未開拓の部分が多い。C*環の正凸錐がジャイロ群であること、また本研究代表者と分担者の阿部により一般ジャイロ空間が定義され、正凸錐は一般ジャイロ空間であることが知られるようになった。その応用として C*環の正凸錐やその部分構造における Thompson 等距離写像の形が記述され、保存問題の研究にジャイロ構造の理論が有用であることが理解されるようになった。

2. 研究の目的

バナッハ環および関数空間をはじめとするバナッハ空間における保存問題に対する研究が進展する一方で、Kaplansky 問題などバナッハ環の本質に根差した古典的問題が未解決であり、新たな方法論の必要性が高まっている。保存問題を組織的に取り扱えるような枠組みを提供し保存問題の研究を推進することが本研究の全体構想である。ジャイロ空間を一般的に取り扱い、等距離写像などを通してリブシツ空間や各種バナッハ環における保存問題の研究を行う。

3. 研究の方法

一般ジャイロ空間の理論を整備し、ジャイロ構造を持つ対象の間の写像の解析を行い等距離写像の問題や各種保存問題の解決に寄与する。リブシツ空間をはじめとするバナッハ環における等距離写像の研究を行う。その際に適切四つ組を用いる方法や、エルミート作用素を用いた Lumer 's method を拡張して用いて等距離写像の研究に寄与する。

4. 研究成果

(1)ジャイロ群やジャイロ構造に関する研究を行い以下のような研究成果を得ることができた。単位的 C*環の正值可逆元全体からなる正凸推やその部分構造がジャイロ構造を持つことを示した。その際に Hiai-Kosaki による幾何的不等式を用いることにより正凸推やある種の部分構造は多くのユニタリー不変ノルムに関して一般ジャイロ空間であることを示した。そのような多くのユニタリー不変ノルムにより定まる距離をもつ正凸推をはじめとする一般ジャイロ空間についての Mazur-Ulam 型定理を示した。Mazur-Ulam 型定理を用いて等距離写像の形を決定した。また、単位的 C*環の正值可逆元全体の正凸推の連結開部分集合の間の等距離写像が正凸推全体の間の等距離写像に拡張できることを示し、その形を決定した。これはノルム空間の連結開集合の間の等距離写像に対する Mankiewicz の定理のジャイロ版である。単位的 C*環においてその正凸推においてジャイロ演算を用いた要素間の可換性条件を与えた。またメビウスジャイロ群において直行分解にあたる命題を得た。

(2)C*環における可換性に関する研究において以下のような成果をえた。前述のように正凸推上のジャイロ演算に基づく可換性条件を与えた結果に対して、自己共役作用素に対する関数演算による可換性条件を与え、Jean and Ko の問題に対して否定的な解答を与えた。

(3)C*環における Jordan*同形写像をスペクトル条件により決定した。つまり乗法的にスペクトルを保存する写像に対する研究を行って一般線形群やその適当な部分構造におけるある種のスペクトル保存条件と Jordan*同形写像の関係を明らかにした。

(4)リブシツ関数またはベクトル値のリブシツ写像からなるバナッハ空間やバナッハ環の間の等距離写像や各種写像の研究を行って多くの成果を得ることができた。関数環に値をとるリブシツ写像全体のバナッハ空間上の Hermitian 写像の形を決定した。その際に semi-inner product を用いるいわゆる Lumer 's method による議論を行った。またコンパクト Hausdorff 空間上の複素数値連続関数全体のバナッハ環に値をとるリブシツ写像全体のバナッハ環の間の同形写像が特殊な形をしていることを見出し、それをもっと一般のバナッハ環の間の写像の場合に拡張した。1970 年代からの懸案であり、不十分な結果のみしかなかった Rao-Roy の予想とよばれるリブシツ環上の等距離写像に関する予想が知られていた。任意のコンパクト距離空間上のリブシツ関数全体からなる多元環は各種のノルムでバナッハ空間となることが知られている。特にスプレナムノルムとリブシツ定数の和により定まるノルムはそれによってリブシツ関数全体の多元環が単位的可換バナッハ環となる一番自然なノルムである。このノルムについての全射等距離写像の形は Rao-Roy 自身によって単位閉区間 $[0, 1]$ 上のリブシツ関数全体のバナッハ環の場合には決定されていて、一般のコンパクト距離空間上のリブシツ関数全体のバナッハ環の場合も同様な表現によりあらわされるであろうというのが Rao-Roy の予想であった。一般の場合の結果は 1988 年に Jarosz-Pathak による発表があったものの、その後不十分な箇所が指摘され、Rao-Roy 予想は長年にわたり未解決のままであった。Hatori-Oi は Rao-Roy 予想を含む命題の証明に成功し Rao-Roy の予想を最終的に解決した。特に単位的可換 C*環に値をとるような適切四つ組に対する全射等距離写像の形を決定した。適切四つ組の特別な場合がリブシツ環なので Rao-Roy 予想は証明された。リブシツ環や連続微分可能関数からなる空間上の各種ノルムに対する等距離写像を研究し、多くの場合にその形を決定した。関数環と単位的 C*環のテンソル積においてエルミート写像の形を研究しそれを決定した。このことを用いて関数環と単位的 C*環のテンソル積の上の等距離写像の形を決定した。このことは Banach-Stone property に関する Fleming-Jamison の古典的な結果と関係している。さらに等

距離写像全体の群の構造に関する研究を行った。いわゆる 2-局所等距離写像の研究を行って、単位閉区間上の連続微分可能関数からなるバナッハ環において 2-局所等距離写像は全射等距離写像であることを示した。これは等距離写像全体の群の構造に言及した結果であり、今後の発展に期待が持てる結果である。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 19 件)

Osamu Hatori and Shiho Oi, 2-local isometries on function spaces, to appear in Contemporary Mathematics (掲載決定)

Osamu Hatori, Shiho Oi and Hiroyuki Takagi, Peculiar homomorphisms on algebras of vector valued maps, Studia Mathematica vol. 242 (2) (2018), 141-13

Osamu Hatori and Shiho Oi, Isometries on Banach algebras of vector-valued maps, Acta Scientiarum Mathematicarum vol. 84 (2018), 151-183

Osamu Hatori, Hermitian operators and isometries on Banach algebras of continuous maps with values in a unital commutative C^* -algebra, Journal of Function Spaces Volume 2018, Article ID 8085304, 14 pages doi : 10.1155/2018/8085304

Osamu Hatori, Shiho Oi and Hiroyuki Takagi, Peculiar homomorphisms on algebras of vector-valued continuously differentiable maps, Linear and Nonlinear Analysis Vol.3 (2017), 101-109

Osamu Hatori and Shiho Oi, Hermitian operators on Banach algebras of vector-valued Lipschitz maps, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.452 (2017), 378--387, DOI :10.1016/j.jmaa.2017.03.015 Corrigendum to "Hermitian operators on Banach algebras of vector-valued Lipschitz maps" [J. Math. Anal. Appl. 452 (2017), 378--387, DOI : 10.1016/j.jmaa.2017.03.015], Journal of Mathematical Analysis and Applications

Osamu Hatori, Extension of isometries in the generalized gyrovector spaces of the positive cone, Contemporary Mathematics vol. 687 (2017), 145-156

Osamu Hatori, Commuting pairs of self-adjoint elements in C^* -algebras, Mathematica Slovaca, Vol. 67 (2017), no.1, 209--212, DOI: 10.1515/ms-2016-0259

⑨ Osamu Hatori and Lajos Molnar, Spectral conditions for Jordan $*$ -isomorphisms on operator algebras, Studia Mathematica vol.236 (2017), no.2, 101-126 DOI: 10.4064/sm8393-8-2016

Osamu Hatori, Examples and applications of generalized gyrovector spaces, Results in Mathematics vol.71 (2017), no.1, 295-317 DOI: 10.1007/s00025-016-0576-1

Kazuhiro Kawamura and Takeshi Miura, Real-linear surjective isometries between function spaces, Topology Appl., vol. 226 (2017), 66-85

Toshikazu Abe and Keiichi Watanabe, Finitely generated gyrovector subspaces and orthogonal gyrodecomposition in the Mobius gyrovector space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 449 (2017), no.1, 77-90

Toshikazu Abe, A Mazur-Ulam theorem for normed gyrolinear spaces, Problems and recent methods in operator theory, Contemporary Mathematics vol. 687 (2017), 11-20

Toshikazu Abe and Osamu Hatori, On a characterization of commutativity for C^* -algebras via gyrogroup operations, Periodica Mathematica Hungarica, vol.72 (2016), no.2, 248--251 DOI 10.1007/s10998-016-0126-3

Osamu Hatori and Lajos Molnar, Generalized isometries of the special unitary group, Archiv der Mathematik (Basel) Vol.106 (2016), no. 2, 155--163

[学会発表](計 63 件)

- 羽鳥 理, 大井 志穂, 2-local maps on spaces of continuous functions, 日本数学会 2019 年会関数解析学分科会 (東京工業大学), 2019
- Osamu Hatori, 2-local isometries on spaces of continuous functions, Researches on isometries as preserver problems and related topics, RIMS 2019
- Toshikazu Abe, Algebraic structures on R_+ for means, Researches on isometries as preserver problems and related topics, RIMS 2019
- Osamu Hatori, A Problem on isometries on positive cones and a geometric inequality, Seminar at the Budapest University of Technology and Economics (Hungary), 2018
- Osamu Hatori, A Problem on isometries on positive cones and a geometric inequality, Seminar at the department of Analysis at the University of Szeged (Hungary), 2018
- Toshikazu Abe and Osamu Hatori, A geometric inequality and isometries on the positive cone, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会 (岡山大学), 2018
- Osamu Hatori, A geometric inequality and its application, Workshop on the frontiers between functional analysis and algebra (WFFAA) A TRIBUTE TO PROF. AMIN KAIDI, University of Almeria (Spain), 2018
- Takeshi Miura, Isometries on a Lipschitz space of analytic functions, Workshop on the Frontiers between Functional Analysis and Algebra, (University of Almeria (Spain), 2018
- ⑨ Osamu Hatori, A geometric inequality and its application, Seminar in Department of Mathematical Analysis, University of Granada (Spain), 2018
- Takeshi Miura, Isometries on a Lipschitz space of analytic functions, Seminar in Department of Mathematical Analysis, University of Granada (Spain), 2018
- Takeshi Miura, Isometries on C^1 spaces on $[0,1]$ with values in a uniform algebra, International Conference on Mathematics and Statistics (USA), 2018
- Osamu Hatori, Isometries on algebras of continuous maps with values in unital C^* -algebras, International Conference on Mathematics and Statistics (USA), 2018
- Osamu Hatori, Hermitian operators and isometries on Banach algebras of continuous maps with values in unital C^* -algebras, Recent Trends in Operator Theory and Applications (USA), 2018
- Osamu Hatori, Surjective isometries on Banach algebras of Lipschitz maps, 日本数学会 2018 年度年会 (東京大学), 2018
- Osamu Hatori, Isometries on admissible quadruples, RIMS 共同研究 (公開型) 等距離写像理論と保存問題の多様な視点からの研究, 2018
- Osamu Hatori, Peculiar homomorphisms on admissible quadruples, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会 (山形大学), 2017
- Osamu Hatori, A geometric inequality on the positive cone and an application, Positivity IX (University of Alberta, Canada), 2017
- Osamu Hatori, Homomorphisms and isometries on Banach algebras of vector-valued maps, Preservers everywhere (University of Szeged, Hungary), 2017
- Takeshi Miura, Norms on $C^1[0,1]$ and their surjective isometries, Preservers Everywhere (Bolyai Institute, Szeged Hungary), 2017
- Osamu Hatori, Lumer's method for certain admissible quadruples, Methods in Operator Theory and Applications (The University of Memphis, USA), 2017
- ⑪ Takashi Miura, Norms and isometries on $C^1[0,1]$, Methods in Operator Theory and Applications (The University of Memphis, USA), 2017
- ⑫ 羽鳥 理, Commutativity via gyrogroup operations, 日本数学会 2017 年度年会 (首都大学東京), 2017
- ⑬ 羽鳥 理, Hermitian operators on vector-valued Lipschitz algebras, 日本数学会 2017 年度年会 (首都大学東京), 2017
- ⑭ Osamu Hatori, Shiho Oi and Hiroyuki Takagi, Peculiar isomorphisms on algebras of Lipschitz maps with values in uniform algebras, Workshop in Nara University of Education 2016, 2016
- ⑮ Osamu Hatori, Shiho Oi and Hiroyuki Takagi, Peculiar homomorphisms on commutative Banach algebras of vector-valued functions, Researches on isometries from various viewpoints (RIMS workshop), 2016
- ⑯ Osamu Hatori (Joint work with Shiho Oi), Isometries on algebras of Lipschitz functions with values in commutative C^* -algebras, 20th conference of the international linear algebra society (KU Leuven, Belgium), 2016

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：三浦 毅

ローマ字氏名：Miura Takeshi

所属研究機関名：新潟大学

部局名：自然科学系

職名：教授

研究者番号(8桁)：90333989

研究分担者氏名：阿部 敏一

ローマ字氏名：Abe Toshikazu

所属研究機関名：茨城大学

部局名：理工学研究科

職名：助教

研究者番号(8桁)：40749157

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：Lajos Molnar

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。