

令和 3 年 8 月 17 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K05175

研究課題名(和文) 変形バークマンフォック表現を通じた非可換確率論の研究

研究課題名(英文) Deformation of Bargmann-Fock representation in non-commutative probability theory

研究代表者

浅井 暢宏 (Asai, Nobuhiro)

愛知教育大学・教育学部・教授

研究者番号：60399029

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：変形バークマン・フォック空間ならびにその上での変形ガウス・ポアソン型作用素の分布に関する研究を行った。主な成果は次の通りである。(1) B型フォック空間に付随する変形動径バークマン測度を具体的に構成した。(2) B型フォック空間上でのガウス・ポアソン型作用素を新たに導入し、それらが q 二乗変形マイクスナー分布に従うことを示した。B型の枠組みにおいて、非対称な確率測度が扱えることを示した。(3) ある種の荷重列を付加したA型フォック空間を考えることで、確率論や非可換確率論では馴染みのない例が扱えることが分かった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究において、従来のフォック空間ならびにガウス・ポアソン型作用素の変形・補間理論の拡張により、確率論や非可換確率論では馴染みの薄い非自明な確率分布とより強い非可換性との関係解明への足掛かりになっていることが意義深い。

研究成果の概要(英文)：We considered deformations of the Bargmann-Fock space, Gaussian/Poisson operators, and their probability distributions in terms of non-commutative probabilistic approach.

(1) The radial Bargmann density function associated with the Fock space of type B is explicitly obtained. (2) Gaussian-Poisson type operators on the type B space are introduced. As a result, we showed that a q^2 -Meixner class of probability measures can be treated within the framework of type B. (3) We constructed a weighted q -Fock space and presented unknown and non-trivial examples in previous works.

研究分野：非可換確率論，直交多項式論，

キーワード：フォック空間 非可換確率論 直交多項式論 確率分布 B型ガウス・ポアソン作用素

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

80年代前半に、ハドソンらによるボゾンやフェルミオンフォック空間を基礎空間とした量子確率解析、および、ヴォイクレスクによる自由フォック空間を基礎とした自由確率論が発表された。90年代前半になると、ボゼイコ・シュパイヒャーは、フェルミオン ($q=-1$)、自由 ($q=0$)、およびボゾン ($q=1$) フォック空間を q -補間することで、 q -ウィーナー過程および q -ポアソン過程を A 型フォック空間上で実現することに成功した (A 型理論)。この q -変形理論は A 型コクセター群の長さ関数による対称化作用素を用いた自由フォック空間の 1 径数変形理論とみなすことが出来る。A 型理論では、エルミート多項式やシャリーエ多項式の q -変形が明示的に現れ、対応するバークマン表現はマッセンらにより得られている。

さらに、数え上げ組合せ論的手法による確率変数の非可換独立性、ならびに非可換極限定理の研究において自由フォック空間の変形が議論された。各々目的に応じ様々なアプローチが提案された。現在までに、ヨーロッパ、特に、ポーランドのブロッツワフ大グループを中心に t -変形や s -変形をはじめとする“様々な意味”での非可換確率論における数え上げ組み合わせの研究、および補間理論的研究へと広がりを見せている。これら以外では、シュルマンによる * 双代数上の非可換レヴィー過程の研究が知られている。これは、アゼママルチンゲールの解析を動機付けとした研究であるが、極めて抽象代数的なアプローチである。生成・消滅過程といったある種の素過程の非可換性から生じると考えられる結果の多くを、解析系 (確率論を含む) 研究者が理解するのが難しい状況が続いている。より簡明なアプローチによる理論構築が期待されている。

多くの異なるアプローチが提案される中、アカルディー・ボゼイコによる相互作用フォック空間と確率変数の量子分解法が発表されたのは 90 年代後半のことである。それは、ある種の生成、消滅および個数作用素など、互いに非可換な作用素を用いて確率変数 (過程) を表現する方法である。現在では、確率変数 (過程) が内包する統計性と非可換性の対応関係を調べる方法の一つとして知られている。

研究代表者の浅井は、ホワイトノイズウルトラ超汎函数空間の一般構成法とそれらの分類研究で得た知見と量子分解法の融合にいち早く目を付け、古典的なガウス型シーガル・バークマン変換の非ガウス化の研究を始めた。実際、マイクスナー分布族に付随するバークマン・フォック対応に関する研究を行い、ベッセル核測度に関する二乗可積分解析関数空間による相互作用フォック空間の実現など、バークマン型測度の構成で成果を上げていた。これと並行して、久保・郭と共に乗法的繰り込み法 (MRM) の立場から直交多項式と付随するヤコビ列等の特性量の具体的構成と分類研究を行った。大きな成果の一つは、ブレンケ型母関数に関わるブレンケ・チハラ多項式の分類に成功したことである。一方で、その分類で現れた離散確率測度と直交多項式には量子数 q が含まれる。ブレンケ・チハラ族をはじめとする強い非可換性を有しているケースについては、多くの興味深い未解決事項が残されている。非可換確率論的研究の更なる発展が期待されている。

各々の研究者・グループによって異なるアプローチが提案される一方で、相互の関係を解明することにより、見通し良く非可換確率論 (確率解析) を概観することは重要であると考えていた。 q 解析の援用による簡明で統一的な変形・補間理論の発展を目指し本研究に着手した。

2. 研究の目的

本研究は、量子数を含む確率測度や直交多項式の非可換確率的側面の役割解明に向けた研究と位置付けている。よって、本研究課題の研究期間内における目的は、(1) 変形バークマン・フォック空間に付随する変形バークマン型測度の構成、(2) 非対称確率分布に従うガウス型ではない非可換確率変数のより広いクラスを構成すること、(3) (2) に付随する分割統計を調べることによって変形ウィック公式を導出する。(4) 量子数を含む直交多項式および確率測度の具体例と荷重フォック空間の関係を解明すること。

3. 研究の方法

- (1) 研究の目的で述べたことを行うために、非可換確率論における既存の方法論のみならず、研究代表者の浅井らによる相互作用フォック空間、非ガウス型シーガル・バーグマン変換研究、ならびに MRM で開発した手法や知見をベースにした手法を用いた。研究協力者には、非可換確率論における先行研究や関連研究において得た知見の情報提供、また、数値計算ソフトを用いた確率分布や交換関係の数値実験で協力頂いた。なお、本研究に新たな視点・方法との関連性、または、それらを取り入れる必要が生じた際は、関係する研究者に協力を要請し情報提供頂いた。
- (2) 本研究は、確率論、量子確率論、無限次元解析、直交多項式論などの分野が密接に関連している。各年度において、国内外での関連研究集会やワークショップには積極的に出席し、成果の発表を通して情報発信を行うと同時に、関連研究者との研究討論を行うなど、数学研究の標準的な方法を通し計画を実施した。また、海外の研究者と共にアメリカ数学会年会の特別セッションを主催、また、国内研究者と共同で非可換確率論に関する研究集会を開催することで、情報発信・関連研究の情報収集を行うと同時に、今後の研究の方向性について討議した。なお、コロナ禍以降は、ズームなどのオンライン会議システムとタブレット端末を用いて、成果発表を行い情報発信すると同時に、出席者と研究討論ならびに情報交換した。

4. 研究成果

- (1) B型フォック空間に付随する2径数変形動径バーグマン型測度の構成に成功した。個別に知られていた、ガウス、ポアソン分布に対する古典バーグマン・ガウス測度、マイクスナー分布族に対するガウス・ベッセル測度、A型バーグマン測度、ケステン分布や対称自由マイクスナー分布族に対する t -変形バーグマン型測度、など豊富に良い例を含んでいる。より広い動径バーグマン型測度の族を構成することにより、見通しの良い理解ができるようになった。これらの成果は Journal of Mathematical Physics に掲載された。
- (2) B型フォック空間上でのガウス・ポアソン型作用素を新たに導入し、それらが q^2 変形マイクスナー分布に従うことを示した。B型の枠組みにおいて、非対称な確率測度が扱えることを示した。これらの成果は、Journal of Mathematical Physics に掲載された。一方で、分割統計については幾つかの技術的問題のため研究が進まず、それに伴うウィック公式を得ることは出来なかった。なお、A型個数作用素のB型類似は複数存在すると思われ、古典マイクスナー分布族の変形の多様性を強く示唆するものと思われる。今後の更なる研究の深化が期待される。
- (3) A型フォック空間に対して荷重を付加することで、確率論や非可換確率論では馴染みのない離散確率測度が扱えることが徐々に分かってきた。この方向での今後の発展が期待される。一方で、非可換確率変数の独立性に関わる分割統計など、数え上げ組み合わせ的見地からによる課題は残された。
- (4) 国内外で開催された研究集会・ワークショップにて講演発表する機会をコンスタントに得た。その際、関連研究者との研究討論も同時に行った。特に、直交多項式論に興味をもつ非可換確率研究者との研究討論は積極的に行った。結果的に、関連する課題についての最新情報や、今後の研究の方向性についての有益な助言を得ることが出来た。内容的にも人的交流としても極めて有益であった。なお、コロナ禍以降は、ズームなどのオンライン会議システムとタブレット端末を用いた方法により成果発表・情報発信した。一方で、研究協力者との対面による研究討議の機会を失ったため、オンライン形式での研究打合せとなった。精微に議論を詰めることが難しく研究に遅れが生じたことを付記する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Asai Nobuhiro, Yoshida Hiroaki	4. 巻 1 (4)
2. 論文標題 Deformed Gaussian Operators on Weighted q-Fock Spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Stochastic Analysis	6. 最初と最後の頁 6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.31390/josa.1.4.06	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Asai Nobuhiro, Yoshida Hiroaki	4. 巻 60
2. 論文標題 Poisson type operators on the Fock space of type B	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 011702 ~ 011702
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5074114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Nobuhiro Asai	4. 巻 2089
2. 論文標題 On weighted Fock spaces and distributions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku, RIMS, Kyoto University	6. 最初と最後の頁 84-94
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Nobuhiro Asai, Marek Bozejko, Takahiro Hasebe	4. 巻 72
2. 論文標題 Radial Density Function Associated with the (α, q) -Fock Space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 MI Lecture note	6. 最初と最後の頁 90-98
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Asai Nobuhiro, Krystek Anna Dorota, Wojakowski ?ukasz Jan	4. 巻 49
2. 論文標題 Interpolations of Bargmann Type Measures	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Demonstratio Mathematica	6. 最初と最後の頁 293-301
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/dema-2016-0025	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Asai Nobuhiro, Bozejko Marek, Hasebe Takahiro	4. 巻 57
2. 論文標題 Radial Bargmann representation for the Fock space of type B	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 021702 ~ 021702
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.4939748	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計14件 (うち招待講演 14件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 The Boas-Buck's classical problem on generating functions
3. 学会等名 Workshop on Non-commutative Probability and Related Fields (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 On weighted q-Fock spaces
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究 (公開型) 量子場の数理とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Some Gaussian type operators and nontrivial examples from q-orthogonal polynomials
3. 学会等名 Workshop on "Non-commutative Probability and Related Fields" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Deformed Fock spaces and Operators
3. 学会等名 The QBIC Workshop 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Gaussian-Poisson field operator on the Fock space of type B and q^2 -deformed Meixner distribution
3. 学会等名 The 40th International Conference on Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Deformed free Fock spaces and Meixner distributions
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究 (公開型) 「量子場の数理とその周辺」 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Probability distributions of a field operator associated with a q-deformed algebra
3. 学会等名 AMS-MAA Joint Mathematical Meeting, AMS Special session on Orthogonal Polynomials, Quantum Probability, Harmonic Analysis, and Stochastic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Poisson type operator on the Fock space of type B
3. 学会等名 Non-commutative probability and related fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Weighted Fock spaces with multiparameter and corresponding probability distributions
3. 学会等名 AMS-MAA Joint Mathematical Meeting, Special session on Orthogonal Polynomials, Quantum Probability, and Stochastic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Deformed generating functions and orthogonal polynomials
3. 学会等名 Workshop on Quantum Probability, Infinite Dimensional Analysis and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Analytic characterization theorems in infinite dimensional distribution theory
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所 共同研究(公開型)「量子場の数理とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Radial density function associated to the Fock space of type B and Rogers-Szego polynomials
3. 学会等名 Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 Levy processes and operator algebras, with applications
3. 学会等名 17th Workshop: Non-Commutative probability-- Levy processes and operator algebras, with applications(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Nobuhiro Asai
2. 発表標題 The radial Bargmann measure for the Fock space of type B
3. 学会等名 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所研究集会：量子場の数理とその周辺(招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Workshop on “ Non-commutative Probability and Related Fields ”	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 AMS Special session on Orthogonal Polynomials, Quantum Probability, Harmonic Analysis, and Stochastic Analysis	開催年 2019年～2019年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	The Ohio state university			
ポーランド	University of Wroclaw			
韓国	Chungbuk national university	Dankook university		